This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math
8078
98

[redacted]

Mat. 8078.98

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

GEORGE HAYWARD, M.D.,

OF BOSTON,

(Class of 1809).

21 Nov., 1898.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Trigonometrische Aufgaben

für

Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen,

mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen

von

Dr. Albert Richter,
Professor am Gymnasium und an der Realschule zu Wandsbek.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1898.

Math 8078.98

NOV 21 1898
LIBRARY
Hayward fund.

Alle Rechte,
einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

964

Vorwort.

Auf Wunsch der Verlagsbuchhandlung hat der Verfasser die Ausarbeitung einer Aufgabensammlung übernommen, welche „die Anwendungen auf die Verhältnisse des wirklichen Lebens und der thatsächlichen Naturvorgänge mehr berücksichtigt als die jetzt bestehenden Bücher". Daß dieser Wunsch einem von vielen Lehrern empfundenen Bedürfnis entspricht, geht aus der Resolution hervor, welche der „Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und in den Naturwissenschaften" in seiner Jahresversammlung zu Wiesbaden 1894 auf Antrag von Herrn Professor Pietzker in Nordhausen annahm: „Es ist dringend zu wünschen, daß in den zur Einübung und Befestigung des mathematischen Systems bestimmten Aufgabensammlungen die Anwendungen auf die Verhältnisse des wirklichen Lebens und der thatsächlichen Naturvorgänge eine weit größere Berücksichtigung finden, als das zur Zeit fast überall der Fall ist." Diese Resolution war das Ergebnis ausführlicher und lebhafter Erörterungen auf den beiden vorhergehenden Jahresversammlungen in Braunschweig*) und Berlin. — Hervorzuheben ist in dieser Beziehung, daß u. a. das weite und für einfache Aufgaben

*) In Braunschweig hatte der Verein 1891 einen von Herrn Direktor Wernicke in Braunschweig formulierten Beschluß einstimmig angenommen: „Die Schüler höherer Lehranstalten sind im allgemeinen noch zu wenig imstande das Mathematische in den sich ihnen im Leben darbietenden Erscheinungen zu erkennen, und zwar ist die Ursache davon vorzugsweise in dem Umstande zu suchen, daß die Anwendungen der mathematischen Theorien vielfach in künstlich gemachten Beispielen bestehen, anstatt sich auf Verhältnisse zu beziehen, welche sich in Wirklichkeit darbieten. — Daher muß das System der Schulmathematik von vornherein, unbeschadet seiner vollen Selbständigkeit als Unterrichtsgegenstand, im einzelnen mit Rücksicht auf die sich naturgemäß darbietende Verwendung in Physik, Chemie, Astronomie ꝛc. und kaufmännischem Rechnen aufgebaut werden. Die demgemäß heranzuziehenden Beispiele sollen die Schüler in solchem Grade daran gewöhnen, in dem sinnlich Wahrnehmbaren nicht nur Qualitatives, sondern auch Quantitatives zu beobachten, daß ihnen eine solche Beobachtungsweise dauernd zum unwillkürlichen Bedürfnis wird."

vorzüglich geeignete Gebiet der Nautik sowohl in der ebenen als in der sphärischen Trigonometrie eingehend berücksichtigt ist.*)

Es sind jedoch ebenso, wie es in den allgemein verbreiteten Sammlungen der Fall ist, diejenigen rein trigonometrischen Gebiete berücksichtigt, welche weder mittelbar noch unmittelbar Anwendungen gestatten. Es stehen vor den Anwendungen stets so viele rein trigonometrische Beispiele, daß die betreffenden mathematischen Probleme an denselben bis zur vollen Sicherheit eingeübt werden können. Die Trigonometrie kommt durchaus als etwas Selbständiges zur Geltung. Der mathematischen logischen Schulung des Geistes dient die vorliegende Sammlung in demselben Maße wie die älteren Sammlungen.

Die Stoffauswahl ist nach den neuen preußischen Lehrplänen getroffen.

Die Anwendungen in dieser Sammlung können zur Konzentration des Unterrichts beitragen durch Verknüpfung des mathematischen Unterrichts mit dem physikalischen (in dem auf den höheren Lehranstalten üblichen Sinn, also mit Einschluß der mathematischen Geographie).

In methodischer Beziehung ist als Eigenart des Buches hervorzuheben, daß innerhalb der großen rein mathematischen Aufgabengruppen nicht nur der Fortschritt von den leichteren Beispielen zu den schwereren berücksichtigt ist, sondern auch stets kleine Gruppen von einander sehr nahestehenden Aufgaben gebildet sind.

Von jeder Aufgabenart sind so viele Beispiele vorhanden, daß der Lehrer nicht genötigt ist, jedes Jahr dieselben Aufgaben durchzunehmen. Bei den Anwendungen sind großenteils in Klammern andere Zahlen hinzugefügt für ein zweites gleichartiges Beispiel.

Gegenüber dem lebhaften Kampfe zwischen den Vertretern der bisher üblichen Genauigkeit der logarithmischen Rechnung und den Vorkämpfern für die Einführung vierstelliger Logarithmen ist eine mittlere Stellung eingenommen. Es sind im allgemeinen fünfstellige Logarithmen ohne Benutzung der partes proportionales und der Sekunden zur Anwendung gekommen. Aber es sind in § 6 auch Beispiele vorhanden, an denen man einüben kann, wie, wenn es erforderlich ist, größere Genauigkeit durch die Sekunden erreicht wird; und auch bei den übrigen Aufgaben, namentlich den rein mathematischen, sind in allen Teilen des Buches zahlreiche Beispiele mit Sekunden.

Der Dezimalteilung des Grades steht der Verfasser nicht

*) Von den hier aufgenommenen Aufgaben hat der Verfasser mehrere bereits im Jahrgang 1894 des Pädagogischen Archivs veröffentlicht.

feindlich gegenüber, er hat aber auch hierin, weil sie noch so wenig eingeführt ist, eine mittlere Stellung eingenommen: Meist sind Minuten (und Sekunden) beibehalten; in manchen Fällen ist jedoch die Dezimalteilung acceptiert entweder direkt oder so, daß die Minuten und Sekunden als ein- oder zweistelliger Dezimalbruch des Grades dargestellt werden können.

Das Buch ist aus langjähriger Praxis allmählich hervorgewachsen; die Aufgaben sind im Unterricht geprüft.

Das Resultatenheft enthält bei den Anwendungen z. T. ausführliche Erläuterungen, auch Zeichnungen. Dasselbe ist nicht für Schüler bestimmt und wird nur an Lehrer gesandt.

Wandsbek, Juni 1897.

Inhalt.

I. Goniometrie.

§ 1. Funktionen spitzer Winkel.

Seite

A. Gegeben ist eine Funktion; die fünf anderen sind zu berechnen 1
B. Gegeben ist ein Winkel; zu demselben sind die Funktionen in den Tafeln für die natürlichen trigonometrischen Funktionen zu suchen 1
C. Gegeben ist eine Funktion; der dazu gehörende Winkel ist zu suchen . 1

§ 2. Funktionen von Winkeln über 90 Grad.

A. Gegeben ist ein Winkel; diejenigen Winkel sind zu suchen, für welche eine Funktion einer Funktion des gegebenen Winkels gleich ist 2
B. Gegeben ist ein Winkel; diejenigen Winkel sind zu suchen, für welche eine Funktion einer Funktion des gegebenen Winkels dem Zahlenwerte nach gleich ist, aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat 2
C. Gegeben ist eine Funktion; das dazu gehörende Winkelpaar ist zu suchen 2
D. Gegeben ist eine negative Funktion; zu ihrem Winkelpaar sind die fünf anderen Funktionen zu suchen 3

§ 3. Funktionen von Summen und Differenzen zweier Winkel.

A. Sinus 3
B. Cosinus 4
C. Tangens 4
D. Cotangens 5

§ 4. Funktionen des doppelten und dreifachen und des halben Winkels.

A. Funktionen des doppelten Winkels 5
B. Funktionen des dreifachen Winkels 6
C. Funktionen des halben Winkels 6

§ 5. Summen und Differenzen zweier Funktionen.

A. Sinus 6
B. Cosinus 7

§ 6. Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

A. Aufsuchen des Logarithmus 7
B. Aufsuchen des Winkels 8

II. Ebene Trigonometrie.

A. Das rechtwinkelige Dreieck (einschl. gleichschenkelige Dreiecke, Rechtecke, Rhomben und reguläre Polygone).

§ 7. Die Linien sind unbenannte Größen.

Seite
A. Ein rechtwinkeliges Dreieck 9
B. Ein gleichschenkeliges Dreieck 10
C. Rechteck und Rhombus 10
D. Reguläre Polygone 11

§ 8. Einfache Anwendungen.

A. Schiefe Ebene 11
B. Parallelogramm der Kräfte und der Bewegungen (exkl. schiefe Ebene). 12
C. Geradlinige Verbreitung des Lichtes 13
D. Nivellieren 14
E. Praktische Geometrie 14
F. Messung der Längengrade unter verschiedenen Breiten 15
G. Abstand zweier Himmelskörper 15
H. Nautik 16

§ 9. Aufgaben mit Erweiterungen.

A. Physik 17
B. Form und Achsendrehung der Erde 19
C. Nautik 20
D. Gradnetz nach konischer Abwickelung 20

B. Das schiefwinkelige Dreieck (einschl. Viereck).

§ 10. Die Linien sind unbenannte Größen.

A. Die Seiten und Winkel des Dreiecks 21
B. Der Inhalt, die Radien und die Höhe eines Dreiecks 22
C. Viereck 23

§ 11. Anwendungen.

A. Beispiele, die planimetrischen Konstruktionsaufgaben entsprechen . . . 25
B. Parallelogramm der Kräfte und der Bewegungen 25
C. Optik 27
D. Praktische Geometrie 27
E. Heliocentrische Länge und Planetenabstände 29
F. Nautik 29
G. Rechtwinkelige Dreiecke in Verbindung mit schiefwinkeligen 31

III. Sphärische Trigonometrie.

A. Das rechtwinkelige Dreieck.

§ 12. Ohne Anwendung.

A. Gegeben sind die beiden Katheten 32
B. Gegeben sind die Hypotenuse und eine Kathete 32
C. Gegeben sind eine Kathete und der anliegende schiefe Winkel 32

Seite
D. Gegeben sind eine Kathete und der gegenüberliegende schiefe Winkel . 33
E. Gegeben sind die Hypotenuse und ein schiefer Winkel 33
F. Gegeben sind die beiden schiefen Winkel 33

§ 13. Anwendungen.

A. Ableitungen aus der Polhöhe und der Deklination der Sonne . . . 33
B. Bestimmung der Polhöhe 34
C. Sonstiges 35

B. Das schiefwinkelige Dreieck.

§ 14. Ohne Anwendung.

A. Gegeben sind die drei Seiten 36
B. Gegeben sind die drei Winkel 36
C. Gegeben sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel . 36
D. Gegeben sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel 37
E. Gegeben sind zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen 37
F. Gegeben sind zwei Winkel und die Gegenseite des einen 38

§ 15. Anwendungen.

A. Kürzeste Linien auf der Erdkugel 38
B. Breitenbestimmung 38
C. Bestimmung des Azimutes 39
D. Bestimmung des Stundenwinkels 39
E. Bestimmung der geographischen Länge 40

I. Goniometrie.

§ 1. Funktionen spitzer Winkel.

A. Gegeben ist eine Funktion, die fünf anderen sind zu berechnen.

1. $\sin x =$ a) $\frac{3}{5}$. b) $\frac{35}{37}$. c) $\frac{20}{29}$. d) $\frac{28}{53}$.
2. $\cos x =$ a) $\frac{12}{13}$. b) $\frac{13}{85}$. c) $\frac{33}{65}$. d) $\frac{48}{73}$.
3. $\operatorname{tang} x =$ a) $\frac{24}{7}$. b) $\frac{15}{112}$. c) $\frac{80}{39}$. d) $\frac{65}{72}$.
4. $\operatorname{cotg} x =$ a) $\frac{8}{15}$. b) $\frac{63}{16}$. c) $\frac{51}{140}$. d) $\frac{132}{85}$.
5. $\sec x =$ a) $\frac{41}{40}$. b) $\frac{145}{17}$. c) $\frac{101}{99}$. d) $\frac{193}{95}$.
6. $\operatorname{cosec} x =$ a) $\frac{61}{11}$. b) $\frac{181}{180}$. c) $\frac{185}{57}$. d) $\frac{85}{77}$.

B. Gegeben ist ein Winkel, zu demselben sind die Funktionen in den Tafeln für die natürlichen trigonometrischen Funktionen zu suchen.

1. a) $5^0\,12'$. b) $12^0\,6'$. c) $15^0\,42'$. d) $23^0\,54'$. e) $36^0\,6'$. f) $43^0\,36'$.
2. a) $46^0\,18'$. b) $53^0\,30'$. c) $60^0\,48'$. d) $68^0\,24'$. e) $77^0\,18'$. f) $85^0\,30'$.
3. a) $0{,}5^0$. b) $1{,}7^0$. c) $3{,}1^0$. d) $4{,}7^0$. e) $7{,}4^0$. f) $9{,}8^0$.

C. Gegeben ist eine Funktion, der dazu gehörende Winkel ist zu suchen.

(Die Funktionen 1)—4) stehen in fünfstelligen Tafeln, 5) und 6) in vierstelligen, mit Decimalteilung des Grades.)*)

1. $\sin x =$ a) 0,078459. b) 0,39073. c) 0,70711. d) 0,95372.
2. $\cos x =$ a) 0,99144. b) 0,92050. c) 0,57358. d) 0,69466.
3. $\operatorname{tang} x =$ a) 0,91633. b) 0,13165. c) 38,188. d) 2,4751.
4. $\operatorname{cotg} x =$ a) 2,6746. b) 114,5887. c) 0,11394. d) 0,67451.

---

5. $\sin x =$ a) 0,0279. b) 0,0645. c) 0,1028. d) 0,1444.
6. $\operatorname{tang} x =$ a) 0,02095. b) 0,0507. c) 0,1175. d) 0,1709.

*) Dies gilt auch von 1. a) und 6. a).

§ 2. Funktionen von Winkeln über 90 Grad.

A. Gegeben ist ein Winkel. Diejenigen Winkel sind zu suchen, für welche eine Funktion einer Funktion des gegebenen Winkels gleich ist.*)

1. a) $\sin 100^0$. b) $\cos 123^0$. c) $\operatorname{tang} 134^0$. d) $\operatorname{cotg} 143^0$. e) $\sec 174^0$. f) $\operatorname{cosec} 98^0$.
2. a) $\sin 222^0$. b) $\cos 233^0$. c) $\operatorname{tang} 244^0$. d) $\operatorname{cotg} 255^0$. e) $\sec 266^0$. f) $\operatorname{cosec} 234^0$.
3. a) $\sin 289^0$. b) $\cos 300^0$. c) $\operatorname{tang} 312^0$. d) $\operatorname{cotg} 325^0$. e) $\sec 340^0$. f) $\operatorname{cosec} 354^0$.

B. Gegeben ist ein Winkel. Diejenigen Winkel sind zu suchen, für welche eine Funktion einer Funktion des gegebenen Winkels dem Zahlenwert nach gleich ist, aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

1. a) $\sin 123^0$. b) $\cos 134^0$. c) $\operatorname{tang} 145^0$. d) $\operatorname{cotg} 156^0$. e) $\sec 167^0$. f) $\operatorname{cosec} 178^0$.
2. a) $\sin 187^0$. b) $\cos 199^0$. c) $\operatorname{tang} 211^0$. d) $\operatorname{cotg} 223^0$. e) $\sec 235^0$. f) $\operatorname{cosec} 247^0$.
3. a) $\sin 274^0$. b) $\cos 287^0$. c) $\operatorname{tang} 301^0$. d) $\operatorname{cotg} 313^0$. e) $\sec 326^0$. f) $\operatorname{cosec} 339^0$.

C. Gegeben ist eine Funktion. Das dazu gehörende Winkelpaar ist zu suchen.

1. $\sin x =$ a) $\frac{1}{2}$. b) $-\frac{1}{2}$. c) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. d) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. e) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. f) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
2. $\cos x =$ a) $\frac{1}{2}$. b) $-\frac{1}{2}$. c) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. d) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. e) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. f) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
3. $\operatorname{tang} x =$ a) 1. b) -1. c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. d) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$. e) $\sqrt{3}$. f) $-\sqrt{3}$.
4. $\operatorname{cotg} x =$ a) 1. b) -1. c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. d) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$. e) $\sqrt{3}$. f) $-\sqrt{3}$.
5. $\sec x =$ a) 2. b) -2. c) $\sqrt{2}$. d) $-\sqrt{2}$. e) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. f) $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$.
6. $\operatorname{cosec} x =$ a) 2. b) -2. c) $\sqrt{2}$. d) $-\sqrt{2}$. e) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. f) $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

---

*) z. B. $\sin 110^0 = \sin 70^0 = \cos 20^0 = \cos 340^0$.

D. Gegeben ist eine negative Funktion. Zu ihrem Winkelpaar sind die fünf anderen Funktionen zu suchen.*)

1. $\sin x =$ a) $-\frac{24}{25}$. b) $-\frac{15}{113}$. c) $-\frac{60}{109}$.
2. $\cos x =$ a) $-\frac{39}{89}$. b) $-\frac{72}{97}$. c) $-\frac{105}{137}$.
3. $\operatorname{tang} x =$ a) $-\frac{12}{35}$. b) $-\frac{21}{20}$. c) $-\frac{119}{120}$.
4. $\operatorname{cotg} x =$ a) $-\frac{5}{12}$. b) $-\frac{45}{28}$. c) $-\frac{156}{133}$.
5. $\sec x =$ a) $-\frac{65}{56}$. b) $-\frac{85}{84}$. c) $-\frac{101}{20}$.
6. $\operatorname{cosec} x =$ a) $-\frac{17}{8}$. b) $-\frac{73}{55}$. c) $-\frac{125}{117}$.

§ 3. Funktionen von Summen und Differenzen zweier Winkel.

A. Sinus.

1. a) Wie groß ist $\sin(\alpha+\beta)$, wenn $\alpha=30^0$ und $\beta=45^0$ ist?
   b) „ „ „ $\sin(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=45^0$ „ $\beta=60^0$ „?
   c) „ „ „ $\sin(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=120^0$ „ $\beta=135^0$ „?
   d) „ „ „ $\sin(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=225^0$ „ $\beta=330^0$ „?**)
2. a) Wie groß ist $\sin(\alpha+\beta)$, wenn $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ und $\sin\beta=\frac{12}{37}$ ist?***)
   b) „ „ „ $\sin(\alpha+\beta)$, „ $\sin\alpha=\frac{21}{29}$ „ $\sin\beta=\frac{45}{53}$ „?

---

*) z. B. ist für $\sin x = -\frac{3}{5}$ im dritten Quadranten $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tang} x = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{4}{3}$, $\sec x = -\frac{5}{4}$, $\operatorname{cosec} x = -\frac{5}{3}$ und im vierten Quadranten $\cos x = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tang} x = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{cotg} x = -\frac{4}{3}$, $\sec x = \frac{5}{4}$, $\operatorname{cosec} x = -\frac{5}{3}$.

**) Wenn $\alpha+\beta$ größer als 360^0 wird, so bezieht sich das Resultat auf den Winkel $\alpha+\beta-360^0$. Hier wird also $\sin 195^0$ gesucht.

***) Hier und bei den 7 folgenden ähnlichen Aufgabengruppen 2) das Vorzeichen der zu berechnenden Funktionen beachten! I. Sind α und β spitze Winkel, so ist $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ und $\cos\beta=\frac{35}{37}$, also $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\cdot\frac{35}{37}+\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{37}=\frac{176}{185}$. II. Sind aber α und β stumpfe Winkel, so ist $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ und $\cos\beta=-\frac{35}{37}$, also $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{35}{37}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{12}{37}=-\frac{176}{185}$. III. Ist α spitz und β stumpf, so ist $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{35}{37}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{37}=-\frac{104}{185}$. IV. Ist α stumpf und β spitz, so ist $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\cdot\frac{35}{37}+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{12}{37}=\frac{104}{185}$.

3. a) Wie groß ist $\sin(\alpha-\beta)$, wenn $\alpha=45^0$ und $\beta=30^0$ ist?
   b) „ „ „ $\sin(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=60^0$ „ $\beta=45^0$ „?
   c) „ „ „ $\sin(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=150^0$ „ $\beta=120^0$ „?
   d) „ „ „ $\sin(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=315^0$ „ $\beta=240^0$ „?
4. a) Wie groß ist $\sin(\alpha-\beta)$, wenn $\sin\alpha=\frac{84}{85}$ und $\sin\beta=\frac{5}{13}$ ist?
   b) „ „ „ $\sin(\alpha-\beta)$, „ $\sin\alpha=\frac{56}{65}$ „ $\sin\beta=\frac{55}{73}$ „?

B. Cosinus.

1. a) Wie groß ist $\cos(\alpha+\beta)$, wenn $\alpha=30^0$ und $\beta=45^0$ ist?
   b) „ „ „ $\cos(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=45^0$ „ $\beta=60^0$ „?
   c) „ „ „ $\cos(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=210^0$ „ $\beta=225^0$ „?
   d) „ „ „ $\cos(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=300^0$ „ $\beta=120^0$ „?
2. a) Wie groß ist $\cos(\alpha+\beta)$, wenn $\cos\alpha=\frac{7}{25}$ und $\cos\beta=\frac{112}{113}$ ist?
   b) „ „ „ $\cos(\alpha+\beta)$, „ $\cos\alpha=\frac{39}{89}$ „ $\cos\beta=\frac{72}{97}$ „?

---

3. a) Wie groß ist $\cos(\alpha-\beta)$, wenn $\alpha=45^0$ und $\beta=30^0$ ist?
   b) „ „ „ $\cos(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=60^0$ „ $\beta=45^0$ „?
   c) „ „ „ $\cos(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=150^0$ „ $\beta=135^0$ „?
   d) „ „ „ $\cos(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=225^0$ „ $\beta=210^0$ „?
4. a) Wie groß ist $\cos(\alpha-\beta)$, wenn $\cos\alpha=\frac{8}{17}$ und $\cos\beta=\frac{51}{149}$ ist?
   b) „ „ „ $\cos(\alpha-\beta)$, „ $\cos\alpha=\frac{16}{65}$ „ $\cos\beta=\frac{85}{157}$ „?

C. Tangens.

1. a) Wie groß ist $\tan(\alpha+\beta)$, wenn $\alpha=30^0$ und $\beta=45^0$ ist?
   b) „ „ „ $\tan(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=45^0$ „ $\beta=60^0$ „?
   c) „ „ „ $\tan(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=240^0$ „ $\beta=300^0$ „?
   d) „ „ „ $\tan(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=315^0$ „ $\beta=330^0$ „?
2. a) Wie groß ist $\tan(\alpha+\beta)$, wenn $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ und $\tan\beta=\frac{35}{12}$ ist?
   b) „ „ „ $\tan(\alpha+\beta)$, „ $\tan\alpha=\frac{20}{21}$ „ $\tan\beta=\frac{28}{45}$ „?
   c) „ „ „ $\tan(\alpha+\beta)$, „ $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$ u. $\tan\beta=\frac{84}{13}$ „?
   d) „ „ „ $\tan(\alpha+\beta)$, „ $\tan\alpha=-\frac{56}{33}$ „ $\tan\beta=-\frac{55}{48}$ ist?

---

3. a) Wie groß ist $\tan(\alpha-\beta)$, wenn $\alpha=45^0$ und $\beta=30^0$ ist?
   b) „ „ „ $\tan(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=60^0$ „ $\beta=45^0$ „?
   c) „ „ „ $\tan(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=150^0$ „ $\beta=120^0$ „?
   d) „ „ „ $\tan(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=210^0$ „ $\beta=135^0$ „?

4. a) Wie groß ist $\tan(\alpha-\beta)$, wenn $\tan\alpha=\frac{112}{15}$ und $\tan\beta=\frac{7}{24}$ ist?
   b) „ „ „ $\tan(\alpha-\beta)$, „ $\tan\alpha=\frac{72}{65}$ „ $\tan\beta=\frac{39}{80}$ „?
   c) „ „ „ $\tan(\alpha-\beta)$, „ $\tan\alpha=-\frac{63}{16}$ u. $\tan\beta=\frac{15}{8}$ „?
   d) „ „ „ $\tan(\alpha-\beta)$, „ $\tan\alpha=-\frac{85}{132}$ „ $\tan\beta=-\frac{140}{51}$ ist?

D. Cotangens.

1. a) Wie groß ist $\cot g(\alpha+\beta)$, wenn $\alpha=30^0$ und $\beta=45^0$ ist?
   b) „ „ „ $\cot g(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=45^0$ „ $\beta=60^0$ „?
   c) „ „ „ $\cot g(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=225^0$ „ $\beta=300^0$ „?
   d) „ „ „ $\cot g(\alpha+\beta)$, „ $\alpha=240^0$ „ $\beta=315^0$ „?

2. a) Wie groß ist $\cot g(\alpha+\beta)$, wenn $\cot g\alpha=\frac{9}{40}$ und $\cot g\beta=\frac{144}{17}$ ist?
   b) „ „ „ $\cot g(\alpha+\beta)$, „ $\cot g\alpha=\frac{20}{99}$ „ $\cot g\beta=\frac{168}{95}$ „?
   c) „ „ „ $\cot g(\alpha+\beta)$, „ $\cot g\alpha=\frac{11}{60}$ „ $\cot g\beta=\frac{180}{19}$ „?
   d) „ „ „ $\cot g(\alpha+\beta)$, „ $\cot g\alpha=\frac{57}{176}$ „ $\cot g\beta=\frac{36}{77}$ „?

---

3. a) Wie groß ist $\cot g(\alpha-\beta)$, wenn $\alpha=45^0$ und $\beta=30^0$ ist?
   b) „ „ „ $\cot g(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=60^0$ „ $\beta=45^0$ „?
   c) „ „ „ $\cot g(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=330^0$ „ $\beta=120^0$ „?
   d) „ „ „ $\cot g(\alpha-\beta)$, „ $\alpha=210^0$ „ $\beta=150^0$ „?

4. a) Wie groß ist $\cot g(\alpha-\beta)$, wenn $\cot g\alpha=\frac{1}{3}$ und $\cot g\beta=\frac{1}{2}$ ist?
   b) „ „ „ $\cot g(\alpha-\beta)$, „ $\cot g\alpha=\frac{4}{15}$ „ $\cot g\beta=\frac{2}{3}$ „?
   c) „ „ „ $\cot g(\alpha-\beta)$, „ $\cot g\alpha=-\frac{3}{5}$ und $\cot g\beta=\frac{5}{8}$ ist?
   d) „ „ „ $\cot g(\alpha-\beta)$, „ $\cot g\alpha=-\frac{7}{9}$ „ $\cot g\beta=-\frac{3}{7}$ ist?

§ 4. Funktionen des doppelten und dreifachen und des halben Winkels.

A. Funktionen des doppelten Winkels.

1. Wie groß ist $\sin 2\alpha$, wenn $\sin\alpha=$ a) 0,6, b) $\frac{5}{13}$, c) 0,28, d) $\frac{8}{17}$, e) $\frac{9}{41}$, f) $\frac{11}{61}$ ist?

2. Wie groß ist $\cos 2\alpha$, wenn $\cos\alpha=$ a) 0,6, b) $\frac{5}{13}$, c) 0,28, d) $\frac{8}{17}$, e) $\frac{9}{41}$, f) $\frac{11}{61}$ ist?

3. Wie groß ist $\operatorname{tang} 2\alpha$, wenn $\operatorname{tang}\alpha =$ a) 0,75, b) 2,4, c) $\frac{7}{24}$, d) 1,875, e) 0,225, f) $5\frac{5}{11}$ ist?

4. Wie groß ist $\operatorname{cotg} 2\alpha$, wenn $\operatorname{cotg}\alpha =$ a) 0,75, b) 2,4, c) $\frac{7}{24}$, d) 1,875, e) 0,225, f) $5\frac{5}{11}$ ist?

B. Funktionen des dreifachen Winkels.

1. Wie groß ist $\sin 3\alpha$, wenn $\sin\alpha =$ a) 0,2, b) 0,3, c) 0,45, d) 0,56, e) $\frac{2}{3}$, f) $\frac{5}{6}$ ist?

2. Wie groß ist $\cos 3\alpha$, wenn $\cos\alpha =$ a) 0,4, b) 0,7, c) 0,23, d) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist?

3. Wie groß ist $\operatorname{tang} 3\alpha$, wenn $\operatorname{tang}\alpha =$ a) 0,5, b) 0,8, c) 0,12, d) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, e) 1, f) $\sqrt{3}$ ist?

4. Wie groß ist $\operatorname{cotg} 3\alpha$, wenn $\operatorname{cotg}\alpha =$ a) 0,8, b) 0,9, c) 0,21, d) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, e) 1, f) $\sqrt{3}$ ist?

C. Funktionen des halben Winkels.

1. Wie groß ist $\sin\frac{\varphi}{2}$, wenn $\cos\varphi =$ a) $\frac{7}{8}$, b) $\frac{17}{18}$, c) $\frac{7}{32}$, d) 0,82, e) $-0{,}5$, f) 0 ist?

2. Wie groß ist $\cos\frac{\varphi}{2}$, wenn $\cos\varphi =$ a) 0,125, b) $\frac{7}{18}$, c) 0,53125, d) 0,62, e) $-0{,}5$, f) 0 ist?

3. Wie groß ist $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$, wenn $\cos\varphi =$ a) 0,6, b) $\frac{5}{13}$, c) 0,96, d) $\frac{8}{17}$, e) $\frac{1}{2}$, f) $-\frac{1}{2}$ ist?

4. Wie groß ist $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$, wenn $\cos\varphi =$ a) 0,8, b) $\frac{19}{13}$, c) 0,28, d) $\frac{15}{17}$, e) $\frac{1}{2}$, f) $-\frac{1}{2}$ ist?

§ 5. Summen und Differenzen zweier Funktionen.*)

A. Sinus.

1. Wie groß ist $\sin m + \sin n$, wenn a) $m = 33^0$ und $n = 27^0$, b) $m = 189^0\,10'$ und $n = 170^0\,50'$, c) $m = 94^0\,5'$ und $n = 85^0\,55'$, d) $m = 156{,}7^0$ und $n = 143{,}3^0$ ist?

*) Sämtliche Aufgaben sind nur mit Hilfe der natürlichen trigonometrischen Funktionen (also ohne Logarithmen) zu berechnen.

2. Wie groß ist $\sin m - \sin n$, wenn a) $m = 71^0$ und $n = 49^0$, b) $m = 102^0\,10'$ und $n = 77^0\,50'$, c) $m = 134^0\,1'$ und $n = 105^0\,59'$, d) $m = 196{,}2^0$ und $n = 163{,}8^0$ ist?

B. Cosinus.

1. Wie groß ist $\cos m + \cos n$, wenn a) $m = 123^0$ und $n = 3^0$, b) $m = 189^0\,10'$ und $n = 9^0\,10'$, c) $m = 244^0\,5'$ und $n = 4^0\,5'$, d) $m = 186{,}7^0$ und $n = 6{,}7^0$ ist?
2. Wie groß ist $\cos n - \cos m$, wenn a) $m = 68^0$ und $n = 8^0$, b) $m = 350^0\,50'$ und $n = 9^0\,10'$, c) $m = 191^0\,12'$ und $n = 11^0\,12'$, d) $m = 313{,}4^0$ und $n = 13{,}4^0$ ist?

§ 6. Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

A. Aufsuchen des Logarithmus.

1. a) $\sin 12^0\,36'$. b) $\cos 23^0\,48'$. c) $\tan 34^0\,54'$. d) $\cot 44^0\,42'$.
2. a) $\sin 45^0\,6'$. b) $\cos 56^0\,12'$. c) $\tan 67^0\,18'$. d) $\cot 78^0\,24'$.
3. a) $\sin 43{,}2^0$. b) $\cos 32{,}1^0$. c) $\tan 21{,}9^0$. d) $\cot 12{,}7^0$.
4. a) $\sin 45{,}6^0$. b) $\cos 56{,}7^0$. c) $\tan 67{,}8^0$. d) $\cot 78{,}9^0$.

---

5. a) $\sin 11^0\,12'\,36''$. b) $\tan 21^0\,31'\,12''$. c) $\sin 66^0\,6'\,36''$. d) $\tan 87^0\,16'\,48''$.
6. a) $\cos 12^0\,13'\,12''$. b) $\cot 15^0\,16'\,12''$. c) $\cos 55^0\,56'\,24''$. d) $\cot 58^0\,59'\,24''$.
7. a) $\sin 11{,}12^0$. b) $\tan 21{,}31^0$. c) $\sin 66{,}66^0$. d) $\tan 87{,}65^0$.
8. a) $\cos 12{,}13^0$. b) $\cot 15{,}16^0$. c) $\cos 55{,}56^0$. d) $\cot 58{,}59^0$.

---

9. a) $\sin 99^0\,6'$. b) $\cos 300^0\,30'$. c) $\tan 223^0\,48'$. d) $\cot 250^0\,36'$.
10. a) $\sin 143^0\,4'\,48''$. b) $\cos 310^0\,20'\,24''$. c) $\tan 240^0\,40'\,12''$. d) $\cot 213^0\,14'\,24''$.
11. a) $\sin 99{,}9^0$. b) $\cos 300{,}1^0$. c) $\tan 223{,}4^0$. d) $\cot 250{,}5^0$.
12. a) $\sin 143{,}45^0$. b) $\cos 310{,}23^0$. c) $\tan 240{,}44^0$. d) $\cot 213{,}14^0$.

---

13. a) $\sin 1^0\,2'\,24''$. b) $\sin 0^0\,12'\,36''$. c) $\tang 0^0\,23'\,12''$.
d) $\tang 0^0\,34'\,48''$. e) $\cotg 0^0\,45'\,36''$. f) $\cotg 0^0\,56'\,24''$.
14. a) $\cos 88^0\,8'\,24''$ b) $\cos 89^0\,9'\,36''$. c) $\tang 88^0\,6'\,36''$.
d) $\tang 89^0\,10'\,12''$. e) $\cotg 88^0\,13'\,48''$. f) $\cotg 89^0\,44'\,24''$.
15. a) $\sin 1{,}23^0$. b) $\sin 0{,}12^0$. c) $\tang 0{,}23^0$. d) $\tang 0{,}34^0$.
e) $\cotg 0{,}45^0$. f) $\cotg 0{,}56^0$.
16. a) $\cos 88{,}88^0$. b) $\cos 89{,}91^0$. c) $\tang 88{,}64^0$. d) $\tang 89{,}11^0$.
e) $\cotg 88{,}13^0$. f) $\cotg 89{,}44^0$.
17. a) $\sin 0^0\,0'\,3{,}6''$. b) $\sin 0^0\,0'\,7{,}2''$. c) $\sin 0^0\,0'\,5{,}4''$
d) $\sin 0^0\,0'\,9{,}1''$.

B. Aufsuchen des Winkels.

Die Logarithmen stehen in den vierstelligen Tafeln mit Decimalteilung des Grades.

1. Sinus. a) 9,6814. b) 8,8888. c) 9,9979.
2. Cosinus. a) 9,7764. b) 8,9208. c) 9,9859.
3. Tangens. a) 9,8075. b) 8,8792. c) 11,3264.
4. Cotangens. a) 9,9207. b) 8,8812. c) 11,0326.

Die Logarithmen stehen in den fünfstelligen Tafeln mit Einteilung des Grades in Minuten.

5. Sinus. a) 8,68886. b) 9,13813. c) 9,99056.
6. Cosinus. a) 9,99617. b) 9,98924. c) 9,50598.
7. Tangens. a) 8,98358. b) 10,99321. c) 11,07586.
8. Cotangens. a) 8,91495. b) 10,91717. c) 11,08505.

Die Logarithmen stehen nicht in den Tafeln.

9. Sinus. a) 8,88888. b) 9,99583. c) 8,76543.
10. Cosinus. a) 8,98989. b) 9,89892. c) 8,65432.
11. Tangens. a) 9,87654. b) 10,98765. c) 11,10987.
12. Cotangens. a) 8,76678. b) 9,87789. c) 10,98789.

Unter 8,54321 oder über 11,45678.

13. Sinus. a) 8,4321. b) 8,12345. c) 5,98765. d) 6,4321.
14. Cosinus. a) 8,13579. b) 8,45678. c) 6,12345. d) 6,56789.
15. Tangens. a) 8,44444. b) 8,2468. c) 11,52334. d) 12,3456.
16. Cotangens. a) 6,789. b) 7,6789. c) 11,579 d) 12,34321.
17. Sinus. a) 4,715673. b) 5,02182. c) 5,4972. d) 5,64897.

II. Ebene Trigonometrie.

A. Das rechtwinkelige Dreieck

(einschl. gleichschenkelige Dreiecke, Rechtecke, Rhomben und reguläre Polygone).

§ 7. Die Linien sind unbenannte Größen.

A. Ein rechtwinkeliges Dreieck.

1. Gegeben sind die Katheten a und b. Zu berechnen ist die Hypotenuse und ein spitzer Winkel α. a) $a = 3$, $b = 4$. b) $a = 7$, $b = 24$. c) $a = 9$, $b = 40$. d) $a = 12$, $b = 35$. — e) $a = 123$, $b = 234$. f) $a = 3456$, $b = 456$. g) $a = 5678$, $b = 6789$. h) $a = 10298$, $b = 10897$. — i) $a = 3{,}21$, $b = 4{,}32$. k) $a = 0{,}345$, $b = 0{,}456$. l) $a = 4{,}554$, $b = 6{,}776$. m) $a = 0{,}10201$, $b = 1{,}0901$.
2. Gegeben sind die Hypotenuse c und eine Kathete a. Zu berechnen ist die andere Kathete und der ihr anliegende spitze Winkel α. a) $a = 12$, $c = 13$. b) $a = 15$, $c = 17$. c) $a = 60$, $c = 61$. d) $a = 13$, $c = 85$. — e) $a = 222$, $c = 333$. f) $a = 555$, $c = 4444$. g) $a = 5555$, $c = 6666$. h) $a = 10111$, $c = 10888$. — i) $a = 34{,}3$, $c = 43{,}4$. k) $a = 0{,}454$, $c = 0{,}545$. l) $a = 566{,}5$, $c = 655{,}6$. m) $a = 0{,}7887$, $c = 0{,}8778$.
3. Gegeben sind eine Kathete a und der gegenüberliegende Winkel α. Zu berechnen sind die beiden anderen Seiten. a) $a = 12$, $\alpha = 34^\circ 42'$. b) $a = 234$, $\alpha = 45^\circ 6'$. c) $a = 3456$, $\alpha = 78^\circ 36'$. d) $a = 45670$, $\alpha = 20^\circ 54'$. — e) $a = 1{,}35$, $\alpha = 13^\circ 57' 36''$. f) $a = 0{,}246$, $\alpha = 24^\circ 7' 12''$. g) $a = 75{,}31$, $\alpha = 75^\circ 31' 48''$. h) $a = 0{,}08642$, $\alpha = 86^\circ 42' 36''$. — i) $a = 23{,}5$, $\alpha = 13{,}57^\circ$. k) $a = 0{,}642$, $\alpha = 24{,}68^\circ$. l) $a = 13{,}57$, $\alpha = 75{,}31^\circ$. m) $a = 0{,}02468$, $\alpha = 86^\circ 42'$.
4. Gegeben sind die Hypotenuse c und ein spitzer Winkel α. Zu berechnen sind die beiden Katheten. a) $c = 45$, $\alpha = 12^\circ 12'$. b) $c = 567$, $\alpha = 81^\circ 18'$. c) $c = 6789$, $\alpha = 67^\circ 24'$. d) $c = 10876$, $\alpha = 10^\circ 30'$. — e) $c = 5{,}43$, $\alpha = 5^\circ 43' 48''$. f) $c = 0{,}654$, $\alpha = 65^\circ 43' 12''$. g) $c = 765{,}4$, $\alpha = 76^\circ 54' 36''$. h) $c = 0{,}8765$, $\alpha = 87^\circ 26' 24''$. — i) $c = 3{,}45$, $\alpha = 5{,}43^\circ$. k) $c = 0{,}456$, $\alpha = 65{,}43^\circ$. l) $c = 4{,}567$, $\alpha = 76{,}54^\circ$. m) $c = 0{,}5678$, $\alpha = 87{,}65^\circ$.

5. Gegeben sind der Flächeninhalt F und ein spitzer Winkel α. Zu berechnen sind die 3 Seiten. a) $F = 50$, $\alpha = 75^0$. b) $F = 72$, $\alpha = 15^0$. c) $F = 987$, $\alpha = 9^0 48'$. d) $F = 8778$, $\alpha = 63^0 36'$. — e) $F = 34{,}3$, $\alpha = 34^0 34' 12''$. f) $F = 0{,}454$, $\alpha = 45^0 45' 36''$. g) $F = 56{,}56$, $\alpha = 56^0 55' 48''$. h) $F = 0{,}6767$, $\alpha = 67^0 5' 24''$. — i) $F = 4{,}34$, $\alpha = 34{,}34^0$. k) $F = 0{,}545$, $\alpha = 45{,}45^0$. l) $F = 6{,}565$, $\alpha = 56{,}56^0$. m) $F = 0{,}7676$, $\alpha = 67{,}67^0$.

B. Ein gleichschenkeliges Dreieck.

g = Grundlinie, h = Höhe, s = Schenkel, α = Basiswinkel, β = Winkel an der Spitze, F = Flächeninhalt. Zu berechnen sind diejenigen 4 dieser Stücke, welche nicht gegeben sind.

1. a) $g = 24$, $h = 5$. b) $g = 288$, $h = 17$. c) $g = 1498$, $h = 1978$. d) $g = 2{,}442$, $h = 0{,}4224$.
2. a) $g = 10$, $s = 13$. b) $g = 40$, $s = 101$. c) $g = 4994$, $s = 9449$. d) $g = 8{,}668$, $s = 6{,}886$.
3. a) $h = 15$, $s = 17$. b) $h = 19$, $s = 181$. c) $h = 4567$, $s = 7654$. d) $h = 0{,}4554$, $s = 4{,}554$.
4. a) $g = 30$, $\alpha = 45^0$. b) $g = 4578$, $\alpha = 45^0 54'$. c) $g = 8{,}754$, $\alpha = 87^0 55' 12''$. d) $g = 0{,}9532$, $\beta = 95{,}32^0$.
5. a) $h = 120$, $\beta = 120^0$. b) $h = 9879$, $\alpha = 84^0 48'$. c) $h = 0{,}4772$, $\beta = 147^0 3' 36''$. d) $h = 6{,}026$, $\alpha = 60{,}26^0$.
6. a) $s = 376$, $\beta = 76^0$. b) $s = 7634$, $\beta = 76^0 24'$. c) $s = 9{,}738$, $\alpha = 15^0 15' 36''$. d) $s = 0{,}8379$, $\alpha = 83{,}79^0$.
7. a) $F = 420$, $g = 24$. b) $F = 81$, $s = 18$. c) $F = 1260$, $h = 45$. d) $F = 1092$, $s = 85$.
8. a) $F = 18$, $\alpha = 45^0$. b) $F = 100$, $\alpha = 75^0$. c) $F = 200$, $\beta = 120^0$. d) $F = 2468$, $\alpha = 24{,}68^0$.

C. Rechteck und Rhombus.

1. Rechteck. a und b = Seiten, d = Diagonale, $\sphericalangle da$ und $\sphericalangle db$ = Winkel gebildet von Diagonale und Seite, $\sphericalangle \frac{dd}{a}$, $\sphericalangle \frac{dd}{b}$ = Winkel gebildet von den Diagonalen und zwar a oder b gegenüberliegend. Wenn von diesen 4 Winkeln einer gegeben oder gefunden ist, so sind dadurch auch die 3 anderen bekannt. Es sind also von vorstehenden 7 Stücken immer nur 2 zu berechnen. a) $a = 9$, $b = 40$. b) $a = 11$, $d = 61$. c) $a = 439$, $\sphericalangle da = 43^0 54'$. d) $d = 0{,}4379$, $\sphericalangle db = 43^0 7' 48''$. — e) $\sphericalangle \frac{dd}{a} = 66^0 6'$, $a = 6$.

f) $\sphericalangle \frac{dd}{b} = 120^0 12'$, $a = 12$. g) $\sphericalangle \frac{dd}{a} = 18^0 19' 12''$, $d = 181$.

h) $\sphericalangle dd = 18^0 48^0$, $d = 0{,}8181$.

2. Rhombus. s = Seite, d_1 und d_2 = Diagonalen, α_1 und α_2 = Rhombuswinkel in den Endpunkten der entsprechenden Diagonalen. a_1 und a_2 sind Supplementwinkel. Es sind also von diesen 5 Stücken immer nur 2 zu berechnen. a) $d_1 = 144$, $d_2 = 17$. b) $s = 65$, $d_1 = 32$. c) $d_1 = 235$, $\alpha_1 = 22^0 48'$. d) $s = 9{,}807$, $\alpha_2 = 98^0 21' 36''$. — e) $d_1 = 8662$, $d_2 = 1732$. f) $s = 7{,}546$, $d_1 = 5{,}072$. g) $d_2 = 1386$, $\alpha_1 = 13{,}8^0$. h) $s = 0{,}6163$, $\alpha_2 = 161{,}62^0$.

D. Reguläre Polygone.

Zu berechnen sind 3 von den Stücken: Seite, Radius des umbeschriebenen und des einbeschriebenen Kreises, Inhalt.

1. Gegeben ist die Seite: a) = 10 bei einem Fünfeck, b) 1012, Achteck, c) 8,923, Sechzehneck, d) 0,078, Zweiunddreißigeck.
2. Gegeben ist der Radius des umbeschriebenen Kreises: a) 15, Neuneck, b) 441, Fünfzehneck, c) 73,53, Achtundvierzigeck, d) 0,2176, Vierundfünfzigeck.
3. Gegeben ist der Radius des einbeschriebenen Kreises: a) 23, Zehneck, b) 9213, Zwölfeck, c) 7,127, Vierundsechzigeck, d) 0,0001453, Achtzigeck.
4. Gegeben ist der Inhalt: a) 36, Achtzehneck, b) 37760, Zwanzigeck, c) 4,05, Einundachtzigeck, d) 0,384, Sechsundneunzigeck.

§ 8. Einfachste Anwendungen.

A. Schiefe Ebene.

1. Basis, Länge und Höhe.
   a) In einer horizontalen Entfernung von 1,8 [1,12] km hat eine Chaussee eine Steigung von 190 [150] m; wie lang ist die Wegstrecke und unter welchem Winkel ist dieselbe gegen den Horizont geneigt?
   b) Eine Eisenbahn hat auf einer Strecke von 2,5 [3] km eine Steigung von 5 [6]%; wie groß ist der Neigungswinkel der Bahn?
   c) Ein Dach hat eine Höhe von 5 [6] m und eine Neigung von 40 [30]°; wie groß ist der Abstand der unteren Dachränder von einander und wie groß ist eine Dachfläche, wenn das Haus 20 [15] m lang ist?

d) Ein Weinberg ist um 35^0 [25^0] gegen die Horizontalebene geneigt, der obere Rand liegt 120 [300] m vom unteren entfernt; um wieviel liegt er höher?

2. Druck auf die Ebene und Kraft parallel derselben, ohne Berücksichtigung der Reibung.

a) Ein Eisenbahnwagen strebt infolge der Neigung der Schienen sich mit einer Kraft von 4500 [1600] kg abwärts zu bewegen und übt auf die Schienen einen Druck aus von 33600 [6300] kg; wie groß ist das Gewicht des Wagens und unter welchem Winkel sind die Schienen geneigt?

b) Ein Wagen hat ein Gewicht von 202 [181] Zentner, übt aber auf den Weg nur einen Druck von 198 [180] Zentner aus; wie groß ist die Neigung des Weges und mit welcher Kraft strebt der Wagen herabzugleiten?

c) Bei einem Petroleumlager werden die Fässer über ein um 10^0 [14^0] geneigtes Brett beim Ein- und Ausladen gerollt; welche Kraft muß man anwenden, um ein 1500 [625] kg schweres Faß am Herabgleiten zu hindern, und welchen Druck übt dabei das Faß auf das Brett aus?

d) In einem Gebirge gleiten die gefällten Holzstämme auf einer um 30^0 [$34^0\,10'$] geneigten Holzbahn in das Thal; um einen Stamm am Herabgleiten zu hindern, muß man eine Kraft von 500 [702] kg anwenden; wie schwer ist derselbe?

3. Reibung.

a) Auf einer verstellbaren schiefen Ebene liegt ein Klötzchen von 80 [125] g Gewicht. Sobald der Neigungswinkel $31^0\,30'$ [$26^0\,40'$] überschreitet, beginnt der Klotz zu gleiten; wie groß ist seine Reibung?

b) Der Reibungskoeffizient eines 100 [375] g schweren Brettchens ist 2,96 [1,446]; wie groß ist die Reibung?

B. Parallelogramm der Kräfte und der Bewegungen (ausg. schiefe Ebene).

1. Parallelogramm der Kräfte.

a) Bei einem Apparat zur Veranschaulichung des Gesetzes vom Parallelogramm der Kräfte ziehen 2 Gewichte von 10 [8] und 24 [15] g unter einem Winkel von 90^0; welches Gewicht ist imstande im Scheitel dieses Winkels diesen beiden das Gleichgewicht zu halten, und welche Winkel bilden die Richtungen der beiden ersten Kräfte mit der Richtung der Schwerkraft?

b) Eine Kraft von 212,5 [61] g wird in zwei zu einander senkrechte Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine 187,5 [11] g beträgt; wie groß ist die zweite Seitenkraft, und welchen Winkel bildet ihre Richtung mit der Richtung der Hauptkraft?

c) Von 2 zu einander senkrechten Komponenten beträgt die eine 0,96 [100] kg und bildet mit der Hauptkraft einen Winkel von $16^0\,15'\,36''$ ($= 16{,}26^0$) [$57^0\,50'$]; wie groß ist die andere Komponente und die Hauptkraft?

d) Eine Kraft von 10,25 [1000] kg wird von 2 zu einander senkrechten Kräften aufgehoben und bildet mit der einen derselben einen Winkel von $12^0\,40'\,48''$ ($= 12{,}68^0$) [$13^0\,50'$]; wie groß sind die beiden Seitenkräfte?

2. Parallelogramm der Bewegungen.

a) In einem Fluß ist die Stromgeschwindigkeit 0,8 [1,06] m, ein Kahn wird mit einer Geschwindigkeit von 0,5 $\left[\frac{2}{3}\right]$ m so durch Rudern vorwärts bewegt, daß er bei stillstehendem Wasser sich senkrecht zum Ufer bewegen würde; um welchen Winkel wird er von seiner Bahn abgelenkt?

b) Ein Dampfschiff fährt scheinbar nach Osten mit einer Geschwindigkeit von 4 [5] m, thatsächlich beträgt aber die Geschwindigkeit 5 [6] m, weil ein starker Südwind das Schiff nördlich treibt; um welchen Winkel wird das Schiff von der Ostrichtung abgelenkt?

c) Ein Segelschiff fährt scheinbar 9 [9,71] km nach Süden, in Wirklichkeit wird es aber durch eine Strömung um 10^0 [$13^0 50'$] von seiner Bahn abgelenkt; wie groß ist der wahre Weg?

d) Eine Kugel wird von 2 zu einander senkrechten Stößen gleichzeitig getroffen und bewegt sich infolgedessen mit einer Geschwindigkeit von 10 [100] m so, daß ihre Richtung mit der einen Stoßrichtung einen Winkel von 30^0 [60^0] bildet; welche Geschwindigkeit würden die Stöße der Kugel einzeln erteilt haben?

3. Gleichzeitige Bewegungen.

a) Auf einem Schießstande bewegt sich eine Scheibe mit einer Geschwindigkeit von 6 [5] m in horizontaler Richtung vor der festen Scheibe her, parallel zu derselben; wenn nun ein Schütze gerade der festen Scheibe gegenübersteht und in dem Augenblicke schießen will, wo die beiden Centren sich decken, um welchen Winkel muß er die Flinte in der Richtung der Bewegung vorausrichten, damit er die bewegliche Scheibe im Centrum trifft, wenn die mittlere Geschwindigkeit der Kugel zu 400 [450] m gerechnet wird?

b) Ein Eisenbahnzug fährt mit der Geschwindigkeit von 15 [20] m; senkrecht fallende Regentropfen scheinen, vom Wagen aus betrachtet, einen Winkel von 30^0 [20^0] mit der Vertikalen zu machen; mit welcher Geschwindigkeit fallen die Tropfen?

C. Geradlinige Verbreitung des Lichts.

1. Schattenlänge.

a) Ein vertikaler Stab von 1,2 [3] m Länge wirft einen Schatten von 1,3 [4] m Länge; wie groß ist der Höhenwinkel der Sonne?

b) Wie hoch ist ein Turm, wenn die Sonne bei einem Höhenwinkel von $28^0\,20'$ [$31^0\,30'$] einen Schatten von 125 [62,5] m wirft?

2. Lichtintensität.

a) Nach Wollaston ist die Intensität des Sonnenlichtes gleich der von 61000 Stearinkerzen in 1 m Entfernung; wie groß ist die Intensität, wenn sie eine Fläche unter einem Winkel von $37^0\,7'\,48''$ ($= 37{,}13^0$) [30^0] treffen?

b) Unter welchem Winkel muß eine Fläche zu den Sonnenstrahlen gestellt werden, wenn sie dreimal [zweimal] schwächer beleuchtet werden soll als bei senkrechtem Einfallen der Strahlen?

D. Nivellieren.

1. Elevationswinkel.

a) Unter welchem Höhenwinkel erscheint die Spitze eines 75 [31,8] m hohen Turmes in einer horizontalen Entfernung von 100 [20] m (von seiner Mitte)?

b) Der Gipfel eines 1600 [1562,5] m hohen Berges erscheint unter einem Höhenwinkel von $22^0\,50'$ [$21^0\,50'$]; in welcher horizontalen Entfernung befindet sich der Gipfel vom Beobachter?

2. Depressionswinkel.

a) Von der Zinne eines Turmes sieht man einen in 123 [234] m horizontaler Entfernung in gleicher Ebene mit dem Fuße des Turmes sich befindenden Gegenstand unter einem Depressionswinkel von $24^0\,24'$ ($= 24{,}4^0$) [$12^0\,12'$]; wie hoch befindet sich das Auge über jener Ebene?

b) Unter welchem Depressionswinkel muß die Spitze einer 10 [7] m langen Stange erscheinen von einem Punkte aus, welcher in einer horizontalen Entfernung von 900 [800] m 354 [243] m höher liegt als die Fläche, aus welcher die Stange hervorragt?

E. Praktische Geometrie.

1. Die Spitze des Jakobiturmes in Hamburg liegt 220 m nördlicher und 1450 m östlicher als die Spitze des großen Michaelisturmes; in welcher Richtung liegt der erstere von dem letzteren?

2. Von einem freiliegenden Punkte aus hat nach der Generalstabskarte ein weithin sichtbares östlicher [westlicher] gelegenes Gebäude in der Luftlinie eine horizontale Entfernung von 5,78 [6,89] km und hat eine um $2'$ größere [$3'$ kleinere] geographische Breite; in welcher Richtung befindet sich das Gebäude von jenem Punkte aus?

3. Um die Breite einer Wiese zu messen, die man nicht betreten darf, mißt man am Rande derselben eine Standlinie von 25,3 [53,2] m Länge, merkt sich von dem einen Endpunkt derselben aus einen genau gegenüber liegenden Punkt am entgegengesetzten Rande der Wiese

und bestimmt vom anderen Ende der Standlinie aus den Winkel, welchen die Standlinie mit der Richtung bildet, in welcher der markierte Punkt liegt; er beträgt $57^0\,54'$ [$37^0\,34'$]; wie breit ist die Wiese?

4. Bei der Gradmessung im Jahre 1846 fand man, daß der Turm der Marienkirche in Berlin von dem trigonometrischen Punkte auf dem Eichberge im Südwesten von Berlin 30560 m entfernt ist. Diese Linie wurde auf den durch den Marienturm gehenden Meridian projiziert, mit welchem die Verbindungslinie der beiden trigonometrischen Punkte einen Winkel von $41^0\,23'$ bildet; wie groß ist die Projektion?

F. Messung der Längengrade unter verschiedenen Breiten.

1. Wie groß ist jeder Grad des Breitenkreises, der durch die Sternwarte von Petersburg [Genf] unter $59^0\,56'\,30''$ [$46^0\,12'$] geht, wenn der Erdradius zu 6370 km gerechnet wird?
2. Unter welcher geographischen Breite beträgt die Länge einer Bogenminute auf einem Breitenkreise 1 [1,5] km?
3. Wenn eine Bogenminute auf dem 60sten Breitenkreise 926 [unter $75^0\,32'$ nördl. Breite 463] m lang ist, wie groß ist dann der Erdradius?
4. Ein Punkt 8 [13] Seemeilen nördlich [südlich] von der Sternwarte von Newyork [Rom] liegt ebenso wie Neapel [Tiflis] unter $40^0\,52'$ [$41^0\,41'$] nördlicher Breite. Ersterer Punkt liegt $73^0\,59'$ westlich [$12^0\,29'$ östlich], letzterer $14^0\,15'$ [$44^0\,49'$] östlich von Greenwich; wie weit liegen die beiden Punkte von einander?

G. Abstand zweier Himmelskörper.

1. Wird die Horizontalparallaxe der Sonne zu 8,8″ gerechnet und der Erdradius zu 6370 km; wie groß ergiebt sich dann der Abstand der beiden Weltkörper?
2. Anfang Juli [Januar], bei der Stellung der Erde im Aphel [Perihel], beträgt ihr Abstand von der Sonne 151,1 [147,9] Millionen km, und der Sonnenradius erscheint unter einem Winkel von $15'\,46''$ [$16'\,18''$]; welcher Wert ergiebt sich daraus für die Länge des Sonnenradius?
3. Wenn die Venus, von der Erde aus betrachtet, in der größten Entfernung von der Sonne zu sein scheint, beträgt der Sehwinkel dieses Abstandes 47^0; wie groß ist danach der Radius der (kreisförmig gedachten) Venusbahn, wenn die Entfernung der Erde von der Sonne zu 20 Millionen Meilen gerechnet wird?
4. Die mittlere Horizontalparallaxe des Mondes beträgt etwa $57'$; wie groß ist danach sein Abstand von der Erde in Erdradien?

H. Nautik.

1. Gegeben sind die beiden Katheten.
   a) Ein Schiff hat auf der Fahrt von A nach B 191 sm (Seemeilen) N (in nördlicher Richtung) [84,6 sm S] und 102,1 sm O [93,4 sm W] gesegelt; welchen Kurs hat es gehabt, und welche Distanz hat es zurückgelegt?
   b) Aus einem Hafen C segeln gleichzeitig 2 Schiffe, das eine nach WzN 12,6 [OSO 114,4] sm bis A, das andere nach SzW 6,1 [SSW 93,9] sm bis B; in welcher Richtung und wie weit liegt B von A?
   c) Ein Schiff segelt von A mit einer Geschwindigkeit von 9 [4] Knoten erst 3 [4] Stunden nach NNO $\left[\text{NW } \frac{1}{2} \text{ W}\right]$ bis C, dann 4 $\left[7\frac{1}{2}\right]$ Stunden nach OSO $\left[\text{SW } \frac{1}{2} \text{ S}\right]$ bis B; wie weit und unter welchem Windstrich liegt B von A?
   d) Ein Schiff fährt scheinbar nach NWzW 112 [SzO 19] sm, während ein Strom das Schiff 15 [9] sm nach SWzS [WzS] treibt; welches sind der Kurs und die Distanz der wahren Fahrt?
2. Gegeben sind die Hypotenuse und eine Kathete.
   a) Auf einem Kurse zwischen N und O ist ein Schiff mit 216 [92] sm Distanz von A an einen $2^{\circ}17'$*) [$1^{\circ}25'$] nördlicher gelegenen Ort B gekommen; welchen Kurs hat es gehabt, und wie weit liegt B östlicher als A?
   b) Ein aus der Elbe kommendes Schiff sieht von A aus das 5 [6] sm entfernte Leuchtfeuer auf Helgoland B in WNW $\frac{3}{4}$ W [NWzW] und will an der südlichen Küste Helgolands in 3 [2] sm Abstand vom Leuchtturm vorbeifahren; welchen Kurs muß der Steuermann wählen, und nach wie weiter Fahrt hat das Schiff den bezeichneten Abstand?
   c) Ein Schiff fährt westlich, ein anderes 18 [9] sm nördlich von ihm befindliches Schiff fährt gleichzeitig ab, soll das erstere erreichen und trifft mit ihm nach einer Fahrt von 23 [31] sm zusammen; welchen Kurs hat es gesteuert?
   d) Ein Schiff fährt scheinbar mit einer Fahrt von 7 [8] Knoten nach NzW [NO] und gelangt nach 8 [4] Stunden an eine Insel, welche 67 [33] sm vom Ausgangspunkte der Fahrt liegt, weil ein Strom das Schiff nach OzN [NW] getrieben hat; welches ist der wahre Kurs des Schiffes?
3. Gegeben sind eine Kathete und ein spitzer Winkel.
   a) Ein Schiff ist auf einem SWzW [SzW]-Kurse von A nach B um 130 [104] sm ($= CB$) nach Süden gekommen; wieviel Distanz hat es gesegelt, und wieviel liegt B westlicher als A?

*) Eine Bogenminute auf dem Meridian ist eine Seemeile.

b) Ein Schiff in A hat das Leuchtfeuer B auf Amrum in NzO [NNO] und fährt auf einem $N\frac{1}{4}W$ $\left[NNO\frac{3}{4}N\right]$-Kurse in einem Abstande BC von 6 [4] sm an dem Leuchtturm vorbei. In welcher Entfernung AC stand das Schiff ursprünglich vom Leuchtturm, und wie groß ist AC?

c) Ein Schiff fährt nach SW und gleichzeitig von demselben Orte aus ein anderes nach SOzS; nachdem letzteres 53 [17] sm zurückgelegt hat, befindet es sich an einem Orte, der NOzO von dem gleichzeitigen Orte des ersten liegt; wie weit sind beide Schiffe zu der Zeit von einander entfernt?

d) Ein Schiff fährt scheinbar 17 [51] sm nach NO, legt aber in Wirklichkeit einen größeren Weg zurück, weil ein nach NW gerichteter Strom das Schiff um 2 $\left[3\frac{3}{4}\right]$ Windstriche von dem scheinbaren Wege abgelenkt hat; wie groß ist der wahre Weg?

4. Gegeben sind die Hypotenuse und ein spitzer Winkel.

a) Wieviel O und N ist ein Schiff auf einer Fahrt von 7 [11] Knoten nach $NO\frac{1}{2}N$ $\left[NO\frac{1}{2}O\right]$ in 11 [9] Stunden gekommen?

b) Man hat 97 [106] m Tiefe gelotet, aber die Leine machte einen Winkel von etwa einem Strich mit der Senkrechten; welches ist die wahre Tiefe des Wassers?

c) Aus der astronomischen Bestimmung des Anfangs- und Endpunktes der Fahrt ergiebt sich, daß der wahre Weg eines Schiffes 107 [162] sm nach OzS ist; scheinbar war die Fahrt nach SO gerichtet; um wieviel Seemeilen hatte der nach NO gerichtete Strom das Schiff von der scheinbaren Richtung abgelenkt?

d) Ein Schiff befindet sich NOzN 13 [15] sm von einem Leuchtturm. Das Schiff fährt SSW; in welchem Abstande fährt es an dem Leuchtturm vorbei?

§ 9. Aufgaben mit Erweiterungen.

A. Physik.

1. Parallelogramm der Kräfte.

a) Senkrecht zur Radfläche trifft ein Wind die Speichen eines Windmotors; dieselben sind so um ihre parallel der Radfläche liegende Achse gedreht, daß sie mit der Windrichtung einen Winkel von 15^0 [45^0] bilden; welcher Teil der Kraft des Windes bewirkt die Bewegung der Speichen?

b) Ein Schiff fährt unter einem Winkel von 60^0 [90^0] gegen den Wind, die Segel bilden mit der Längsachse des Schiffes einen Winkel von 30^0 [45^0]; welcher Teil der Kraft des Windes bewirkt die Bewegung des Schiffes?

2. Schief gegen einander treffende Kugeln (die zur Tangentialebene im Berührungspunkte parallelen Komponenten haben gleiche Richtung).

a) Unelastische Kugeln.

α) Die zur Tangentialebene im Berührungspunkte senkrechten Komponenten haben vor dem Zusammenstoß entgegengesetzte Richtungen. Eine Kugel von 12 [7] kg Gewicht und 10,392 [10] m Geschwindigkeit trifft eine andere von 5,32 [1,66] kg Gewicht und 4 [8,66] m Geschwindigkeit so, daß die Bahn der ersteren mit der Berührungsebene im Treffpunkte einen Winkel von 30° [60°] bildet, die der zweiten einen Winkel von 60° [30°]; wie ist die Richtung und Geschwindigkeit der größeren Kugel nach dem Zusammenstoß?

β) Die zur Tangentialebene senkrechten Komponenten haben vor dem Zusammenstoß dieselbe Richtung. Eine Kugel von 12 kg Gewicht und 11 m Geschwindigkeit trifft eine andere von 5 kg Gewicht und 4 m Geschwindigkeit so, daß die Bahn der ersteren mit der Berührungsebene einen Winkel von 60°, die der zweiten einen Winkel von 30° bildet; welchen Winkel bilden nach dem Zusammenstoße die Richtungen der beiden Kugeln miteinander?

b) Elastische Kugeln.

α) Die senkrechten Komponenten sind vor dem Zusammentreffen entgegengesetzt gerichtet. Eine Kugel von 18 kg Gewicht hat eine Geschwindigkeit von 10 m, und ihre Bahn bildet mit der Tangentialebene einen Winkel von 16°, eine andere Kugel von 7 kg Gewicht hat eine Geschwindigkeit von 3 m und bildet einen Winkel von 24° mit jener Ebene; wie sind die Richtungen und die Geschwindigkeiten nach dem Zusammenstoß?

β) Die Komponenten haben gleiche Richtung. Eine Kugel von 3 kg Gewicht hat eine Geschwindigkeit von 22,5 m und bildet mit der Tangentialebene vor dem Zusammenstoß einen Winkel von 36°, nachher einen Winkel von 30°, die andere Kugel von 2 kg Gewicht bildet vor dem Zusammentreffen einen Winkel von 25°; wie groß ist ihre Geschwindigkeit vor dem Zusammentreffen?

3. Schiefe Ebene verbunden mit freiem Fall und schiefem Wurf.

a) Der Fallraum ist gegeben.

α) Nachdem eine vollkommen elastische Kugel 10 m gefallen ist, trifft sie auf eine schiefe Ebene von 30° Neigung; wie weit vom ersten Treffpunkt berührt sie die schiefe Ebene zum zweiten Male?

β) Aus einer Höhe von 40 m fällt eine vollkommen elastische Kugel auf eine schiefe Ebene von 30° Neigung; nach wieviel

Sekunden vom Beginn der paraboliſchen Bewegung an trifft ſie die ſchiefe Ebene zum zweiten Male?

b) Der Fallraum wird geſucht.

α) Aus welcher Höhe muß eine vollkommen elaſtiſche Kugel auf eine ſchiefe Ebene von 30^0 Neigung fallen, wenn ſie 360 m vom erſten Treffpunkt die ſchiefe Ebene zum zweiten Male berühren ſoll?

β) Aus welcher Höhe muß eine vollkommen elaſtiſche Kugel fallen, wenn ſie 2 Sekunden nach Beginn ihrer paraboliſchen Bahn die Ebene zum zweiten Male treffen ſoll?

B. Form und Achſendrehung der Erde.

1. Krümmung der Meeresfläche von Süden nach Norden.

a) Die Küſte der Oſtſee nördlich von Königsberg liegt etwa unter dem 55ſten Breitenkreiſe. Der 64ſte Breitenkreis trifft die ſchwediſche Küſte bei der Stadt Umea; um wieviel erhebt ſich auf dieſer Strecke die Mitte des Meridianbogens über der zugehörigen Sehne, wenn der Erdradius zu 6370 km gerechnet wird?

b) Wieviel Grad, Minuten und Sekunden beträgt der Meridianbogen, deſſen Mitte ſich 1 km über der zugehörigen Sehne erhebt?

2. Unterſchied in der Rotationsgeſchwindigkeit in verſchiedener Entfernung vom Erdmittelpunkte.

a) Reich maß 1831 in einem Bergwerksſchachte bei Freiberg in Sachſen unter $50^0\,53'$ n. Br. bei einer Fallhöhe von 158,5 m die öſtliche Abweichung beim freien Fall; um wieviel war die Rotationsgeſchwindigkeit an der Erdoberfläche größer als in jener Tiefe?

b) Bei welcher Höhendifferenz würde der Unterſchied in der Rotationsgeſchwindigkeit unter dem 45ſten Breitenkreiſe 1 cm ausmachen?

c) Unter welcher geographiſchen Breite beträgt bei einer Höhendifferenz von 300 m der Unterſchied der Rotationsgeſchwindigkeit 1,5 cm?

3. Seitendruck nach rechts bei den nord- oder ſüdwärts fahrenden Eiſenbahnen.

a) Mit welcher Geſchwindigkeit iſt ein Eiſenbahnzug unter einer Breite von $40^0\,45'$ ($= 40{,}75^0$) beſtrebt die Schienen zu verlaſſen, wenn er in jeder Sekunde 14 m zurücklegt?

b) Bei welcher Fahrgeſchwindigkeit beträgt die nach Weſten gerichtete Geſchwindigkeit eines nach Süden fahrenden Eiſenbahnzuges unter der Breite von 60^0 1 mm in der Sekunde?

c) Unter welcher geographiſchen Breite würde bei einer Fahrgeſchwindigkeit von 15 m die öſtliche Seitengeſchwindigkeit eines nach Norden fahrenden Zuges 0,3 mm betragen?

C. Nautik.

1. Rechnung nach Mittelbreite.
   a) Von dem Kap Finisterrä A (an der NW-Küste von Spanien) unter $42^0\,52'\,48''$ ($= 42{,}88^0$) N (d. h. nördlicher Breite) und $9^0\,12'\,12''$ ($= 9{,}2^0$) W (d. h. westlich von Greenwich) ist ein Schiff NNO $\frac{1}{2}$ N 250 sm nach B gesegelt; welche Breite und Länge hat es erreicht?
   b) Von einem Orte A im atlantischen Ocean unter $48^0\,28'\,48''$ ($= 48{,}48^0$) N und $7^0\,3'\,42''$ ($= 7{,}06^0$) W soll nach Kap Lizard B (Südwestspitze von England) unter $49^0\,57'\,42''$ ($= 49{,}96^0$) N und $5^0\,12'$ ($= 5{,}2^0$) W gesegelt werden; welchen Kurs hat man zu wählen und wie groß ist die Entfernung?
   c) Von einem Orte A unter $48^0\,21'$ ($= 48{,}35^0$) N hat ein Schiff in östlicher Richtung 112 sm zurückgelegt und dabei einen Längenunterschied von $2^0\,51'$ ($= 2{,}85^0$) erreicht. Unter welcher Breite liegt der erreichte Ort B, welcher Kurs ist gesteuert und wie groß ist AB?
2. Rechnung nach der vergrößerten Breite der Merkatorprojektion.
   a) b) dieselben Aufgaben wie unter 1 a) und 1 b).
   c) Von einem Orte A unter 60^0 nördl. Breite segelt ein Schiff WNW $\frac{1}{2}$ N nach B und erreicht dadurch einen Längenunterschied von 3^0; welche Breite hat es erreicht und welche Distanz hat es gesegelt?
3. Beschickung einer Höhe von einem Beobachtungsorte auf einen anderen.
   a) An einem Orte A sieht man die Sonne in einer Höhe von $30^0\,36'$ [$= 30{,}6^0$) in SzW; wie groß ist der Höhenwinkel der Sonne zu derselben Zeit an einem Orte B, der SSO 123 sm von A liegt?
   b) In A steht die Sonne in WSW $50^0\,6'$ ($= 50{,}1^0$) über dem Horizont; wie groß ist ihr Höhenwinkel in dem 234 sm östlicher gelegenen Punkt B?

D. Gradnetz nach konischer Abwickelung.

1. Mit welchem Radius muß für eine Karte von Deutschland vom 46sten bis zum 56sten Breitenkreise der mittelste Breitenkreis beschrieben werden, welchen Abstand haben auf demselben die Meridiane und wie weit sind die Breitenkreise von einander entfernt, wenn der Erdradius zu 126 cm gerechnet wird?
2. Bei einem Gradnetz von 5^0 zu 5^0 für Europa vom 35sten bis zum 75sten Breitenkreise haben die gezeichneten Breitenkreise einen Abstand von 20 mm; mit welchem Radius ist der mittelste Breitenkreis gezeichnet und welchen Abstand haben auf demselben die gezeichneten Meridiane?

3. Für eine Karte der skandinavischen Halbinsel vom 56sten bis zum 72sten Breitenkreise soll der mittelste Breitenkreis mit einem Radius von 200 mm beschrieben werden; welchen Abstand erhalten auf demselben die gezeichneten Meridiane und wie weit sind die gezeichneten Breitenkreise von einander entfernt, wenn das Netz von 2^0 zu 2^0 entworfen werden soll?

4. Auf einer Karte von Italien vom 36sten bis zum 48sten Breitenkreise ist das Gradnetz von 2^0 zu 2^0 entworfen. Auf dem mittelsten Breitenkreise haben die gezeichneten Meridiane einen Abstand von 6 mm; mit welchem Radius ist dieser Breitenkreis beschrieben, und welche Abstände haben die gezeichneten Breitenkreise?

B. Das schiefwinkelige Dreieck
(einschl. Viereck).

§ 10. Die Linien sind unbenannte Größen.

A. Die Seiten und Winkel eines Dreiecks.

a, *b* und *c* sind die Seiten, α, β und γ die gegenüberliegenden Winkel. Von diesen 6 Stücken sind die 3 nicht gegebenen zu berechnen (exkl. 3)).

1. Sinussatz.

   α) Gegeben sind eine Seite und zwei Winkel.

   a) $a = 3$, $\beta = 45^0\,6'$, $\gamma = 78^0\,9'$.

   b) $a = 1234$, $\beta = 56^0\,7'$, $\alpha = 89^0\,10'$.

   c) $a = 10045$, $\beta = 23^0\,34'$, $\gamma = 45^0\,56'\,7''$.

   d) $a = 4321$, $\alpha = 12^0\,34'\,56''$, $\beta = 23^0\,45'\,6''$.

   β) Gegeben sind zwei Seiten und der Gegenwinkel der größeren.

   a) $a = 34$, $b = 56$, $\beta = 78^0\,9'$.

   b) $a = 2345$, $b = 3456$, $\beta = 56^0\,34'$.

   c) $a = 10203$, $b = 2030$, $\alpha = 30^0\,20'\,10''$.

   d) $a = 4567$, $b = 5678$, $\beta = 34^0\,45'\,56''$.

2. Tangentialsatz.

   a) $a = 513$, $b = 224$, $\gamma = 50^0\,8'$.

   b) $a = 4513$, $b = 4093$, $\gamma = 45^0\,40'$.

   c) $a = 12$, $b = 13$, $\gamma = 13^0\,12'\,10''$.

   d) $a = 140$, $b = 150$, $\gamma = 15^0\,14'\,12''$.

   e) $a = 123$, $b = 234$, $\gamma = 123^0\,45'\,56''$.

   f) $a = 34{,}56$, $b = 45{,}67$, $\gamma = 156^0\,7'\,8''$.

   g) $a = 0{,}5678$, $b = 0{,}6789$, $\gamma = 167^0\,9'\,8''$.

   h) $a = 1{,}221$, $b = 2{,}332$, $\gamma = 132^0\,23'\,32''$.

3. Projektionssatz.
   a) $a = 26,\ b = 28,\ \gamma = 10^0\,31'$.
   b) $a = 118,\ b = 239,\ \gamma = 23^0\,27'$.
   c) $a = 3179,\ b = 2110,\ \gamma = 24^0\,7'\,9''$.
   d) $a = 8112,\ b = 4583,\ \gamma = 82^0\,17'\,19''$.
   e) $a = 111,\ b = 222,\ \gamma = 111^0\,22'\,33''$.
   f) $a = 0{,}033,\ b = 0{,}044,\ \gamma = 144^0\,41'\,25''$.
   g) $a = 707,\ b = 606,\ \gamma = 67^0\,6'\,7''$.
   h) $a = 8{,}008,\ b = 5{,}005,\ \gamma = 85^0\,50'\,8''$.

4. Kosinussatz. — Kleine Zahlen.
   a) $a = 5,\ b = 7,\ c = 9$. b) $a = 3,\ b = 8,\ c = 6$.
   c) $a = 4,\ b = 10,\ c = 11$. d) $a = 2,\ b = 14,\ c = 15$.
   e) $a = 5,\ b = 12,\ c = 13$. f) $a = 8,\ b = 15,\ c = 17$.
   g) $a = 0{,}06,\ b = 0{,}08,\ c = 0{,}1$.
   h) $a = 0{,}007,\ b = 0{,}024,\ c = 0{,}025$.

5. Kosinussatz. — Große Zahlen.
   a) $a = 2345,\ b = 3456,\ c = 4567$.
   b) $a = 4321,\ b = 5432,\ c = 6543$.
   c) $a = 10123,\ b = 10234,\ c = 10345$.
   d) $a = 10567,\ b = 10678,\ c = 10789$.
   e) $a = 0{,}5445,\ b = 0{,}6556,\ c = 0{,}7667$.
   f) $a = 0{,}0987,\ b = 0{,}0876,\ c = 0{,}0765$.
   g) $a = 1234,\ b = 2345,\ c = 3456$.
   h) $a = 0{,}007654,\ b = 0{,}006543,\ c = 0{,}005432$.

B. Der Inhalt, die Radien und die Höhen eines Dreiecks.

1. Bestimmung des Inhalts.
   α) Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.
      a) $a = 5,\ b = 6,\ \gamma = 78^0\,9'$.
      b) $a = 4534,\ b = 5645,\ \gamma = 100^0\,10'$.
      c) $a = 0{,}1001,\ b = 0{,}2002,\ \gamma = 30^0\,30'\,3''$.
      d) $a = 0{,}034,\ b = 0{,}045,\ \gamma = 134^0\,45'\,56''$.
   β) Aus den 3 Seiten.
      a) $a = 13,\ b = 14,\ c = 15$. b) $a = 12,\ b = 35,\ c = 37$.
      c) $a = 0{,}39,\ b = 0{,}8,\ c = 0{,}89$.
      d) $a = 0{,}51,\ b = 1{,}4,\ c = 1{,}49$.

2. Der Radius des einem Dreieck umschriebenen Kreises ist zu bestimmen.
   α) Aus dem Flächeninhalt F und dem Produkt abc der drei Seiten.

a) $F = 5$, $abc = 60$. b) $F = 7$, $abc = 140$.
c) $F = 9$, $abc = 252$. d) $F = 11$, $abc = 396$.

β) Aus den 3 Seiten.
a) $a = 56$, $b = 90$, $c = 106$. b) $a = 26$, $b = 168$, $c = 170$.
c) $a = 104$, $b = 112$, $c = 120$.
d) $a = 0{,}66$, $b = 1{,}12$, $c = 1{,}3$.

γ) Aus einer Seite und dem ihr gegenüberliegenden Winkel.
a) $a = 278$, $\alpha = 27^0\,8'$. b) $a = 1278$, $\alpha = 127^0\,8'$.
c) $a = 2468$, $\alpha = 30^0$. d) $a = 98{,}76$. $\alpha = 98^0\,7'\,6''$.

3. Der Radius des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises ist zu bestimmen.
α) Aus dem Flächeninhalt F und dem Umfang U.
a) $F = 21$, $U = 14$. b) $F = 45$, $U = 18$.
c) $F = 77$, $U = 22$. d) $F = 117$, $U = 26$.

β) Aus den 3 Seiten.
a) $a = 48$, $b = 55$, $c = 73$. b) $a = 91$, $b = 98$, $c = 105$.
c) $a = 15$, $b = 112$, $c = 113$. d) $a = 8$, $b = 3{,}9$, $c = 8{,}9$.

4. Bestimmung der Höhe.
α) Aus einer Seite und 2 Winkeln (nur die Höhe auf der gegebenen Seite berechnen).
a) $a = 85$, $\alpha = 64^0\,6'$, $\beta = 88^0\,21'$.
b) $a = 151$, $\beta = 12^0\,11'$, $\gamma = 38^0\,39'$.
c) $a = 211$, $\alpha = 44^0\,51'\,8''$, $\beta = 77^0\,22'\,11''$.
d) $a = 726$, $\beta = 48^0\,55'\,7''$, $\gamma = 39^0\,19'\,8''$.

β) Aus den 3 Seiten (die Höhen ha und hb auf den beiden kleinsten Seiten berechnen.)
a) $a = 65$, $b = 72$, $c = 97$. b) $a = 16$, $b = 63$, $c = 65$.
c) $a = 5{,}1$, $b = 14$, $c = 14{,}9$.
d) $a = 0{,}17$, $b = 0{,}264$, $c = 0{,}314$.

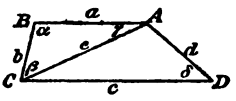
C. Viereck.

1. Rhomboid. s_1 und s_2 sind die Seiten, d_1 und d_2 die Diagonalen. Es sind diejenigen von diesen 4 Stücken zu berechnen, welche nicht gegeben sind und außerdem ein Parallelogrammwinkel, falls ein solcher nicht gegeben ist. Die Winkel sind bezeichnet durch Angabe ihrer Schenkel.
α) a) $s_1 = 6$, $\sphericalangle s_1 s_2 = 78^0\,9'$, $\sphericalangle s_1 d_1 = 45^0\,6'$.
b) $s_1 = 12$, $s_2 = 34$, $\sphericalangle s_1 d_1 = 12^0\,34'$.
c) $s_1 = 567$, $s_2 = 678$, $\sphericalangle s_1 s_2 = 67^0\,8'$.
d) $s_1 = 23{,}45$, $s_2 = 34{,}56$, $d_1 = 45{,}67$.

β) a) $s_1 = 7$, $\sphericalangle s_1 d_1 = 53^\circ 36'$, $\sphericalangle s_1 d_2 = 35^\circ 54'$.
b) $d_1 = 14$, $d_2 = 18$, $\sphericalangle d_1 s_1 = 81^\circ 41'$.
c) $d_1 = 456$, $d_2 = 789$, $\sphericalangle d_1 d_2 = 78^\circ 6'$.
d) $s_1 = 4{,}345$, $d_1 = 6{,}912$, $d_2 = 9{,}134$.

2. **Trapez.** Es ist nach den nicht gegebenen Seiten und Winkeln des Trapezes gefragt (also z. B. nicht nach β, γ und e, auch nicht nach $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle BAD$, weil diese Supplementwinkel von α und δ sind).

α) a) $a = 3$, $\alpha = 100^\circ 10'$, $\gamma = 30^\circ 30'$, $d = 7$. b) $b = 4$, $\beta = 43^\circ 45'$, $\gamma = 69^\circ 12'$, $c = 5$.



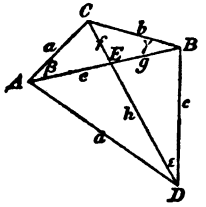
c) $a = 29$, $b = 23$, $\beta = 19^\circ 34'$, $c = 31$.
d) $a = 135$, $b = 357$, $e = 246$, $d = 468$.
e) $a = 4354$, $b = 3243$, $e = 5465$, $\delta = 34^\circ 45'$. f) $a = 0{,}6756$, $b = 0{,}7867$, $e = 0{,}8978$, $c = 0{,}9089$.

β) a) $a = 11$, $c = 12$, $\alpha = 111^\circ 22'$, $\delta = 33^\circ 44'$.
b) $b = 13$, $d = 14$, $\alpha = 131^\circ 4'$, $a = 9$.
c) $a = 980$, $c = 987$, $d = 789$, $\delta = 87^\circ 6'$.
d) $a = 7{,}957$, $b = 6{,}846$, $c = 5{,}735$, $d = 7{,}359$.

3. **Vierecke im allgemeinen.** Die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Vierecks sind zu berechnen.

α) Benutzung des Dreiecks AEC.

a) $a = 15$, $b = 16$, $\beta = 61^\circ 51'$, $\delta = 62^\circ 52'$, $\xi = 63^\circ 53'$.



b) $a = 17$, $b = 19$, $\sphericalangle ACB = 100^\circ 10'$, $\delta = 30^\circ 30'$, $\sphericalangle ADB = 40^\circ 40'$. c) $a = 151$, $\sphericalangle ACB = 60^\circ 6'$, $\gamma = 59^\circ 54'$, $c = 161$, $d = 171$. d) $a = 661$, $AB = 671$, $\sphericalangle ACB = 67^\circ 15'$, $\delta = 20^\circ 40'$, $d = 516$. e) $a = 6522$, $b = 6225$, $\gamma = 62^\circ 52'$, $c = 5226$, $d = 5622$. f) $a = 9865$, $b = 8754$, $AB = 7643$, $c = 6532$, $\xi = 65^\circ 43' 34''$.

β) Benutzung des Dreiecks AEC.

a) $a = 18$, $\alpha = 81^\circ 8'$, $\beta = 8^\circ 18'$, $c = 81$, $h = 18$.
b) $e = 19$, $\alpha = 91^\circ 9'$, $\beta = 9^\circ 19'$, $g = 91$, $h = 19$.
c) $a = 292$, $e = 282$, $f = 272$, $h = 262$, $\xi = 25^\circ 2'$.
d) $a = 343$, $e = 353$, $\alpha = 36^\circ 3'$, $g = 373$, $h = 383$.
e) $a = 9878$, $e = 8767$, $f = 6545$, $c = 7656$, $g = 5434$.
f) $a = 0{,}010001$, $e = 0{,}01001$, $f = 0{,}0101$, $g = 0{,}011$, $h = 0{,}02$.

§ 11. Anwendungen.

A. Beispiele, die planimetrischen Konstruktionsaufgaben entsprechen.

1. Der Umfang eines Dreiecks beträgt 100 [200] cm, zwei Winkel $23^0 54'$ und $34^0 56'$ [$45^0 6'$ und $47^0 16'$]; wie groß sind die Seiten?
2. Eine Seite eines Dreiecks ist 24 [26] cm lang, die Summe der beiden anderen beträgt 42 [62] cm und ein der ersteren anliegender Winkel $42^0 24'$ [$62^0 26'$]; wie groß sind die anderen Winkel des Dreiecks?
3. Eine Seite eines Dreiecks ist 11 [12] cm lang, die Differenz der beiden anderen Seiten beträgt 3 [4] cm und ein der ersteren anliegender Winkel $12^0 34'$ [$13^0 56'$]; wie groß sind die beiden anderen Winkel?
   a) Der gegebene Winkel liegt der kleineren nicht gegebenen Seite gegenüber.
   b) Der gegebene Winkel liegt der größeren nicht gegebenen Seite gegenüber.
4. Eine Seite eines Dreiecks ist 25 [36] cm lang, die Summe der beiden anderen Seiten beträgt 51 [61] cm und der von letzteren eingeschlossene Winkel $40^0 4'$ [$60^0 6'$]; wie groß sind die beiden anderen Winkel?
5. Eine Seite eines Dreiecks ist 345 [456] mm lang, die Differenz der beiden anderen beträgt 67 [78] mm und der von letzteren eingeschlossene Winkel $34^0 56'$ [$45^0 6'$]; wie groß sind die beiden anderen Winkel?

---

6. Der Radius des um ein Dreieck beschriebenen Kreises ist 54 [65] cm, eine Seite 76 [87] cm lang, ein ihr anliegender Winkel beträgt $87^0 6'$ [$65^0 4'$]; wie groß ist der andere anliegende Winkel?
7. Der Radius des um ein Dreieck beschriebenen Kreises ist 432 [321] mm lang, zwei Winkel betragen $43^0 21'$ und $32^0 10'$ [$54^0 32'$ und $65^0 43'$]; wie groß ist die Gegenseite des dritten Winkels?

B. Parallelogramm der Kräfte und der Bewegungen.

1. Parallelogramm der Kräfte.
   a) Eine Kraft von 100 [200] kg soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit ihr Winkel von $20^0 30'$ und $40^0 50'$ [$60^0 7'$ und $70^0 8'$] bilden; wie groß sind diese Seitenkräfte?
   b) Eine Kraft von 319 [208] kg soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine 360 [250] kg beträgt und die andere mit der Hauptkraft einen Winkel von $41^0 33'$ [$30^0 22'$] bildet; wie groß ist die letztere Seitenkraft, und welchen Winkel bildet die erstere mit der Hauptkraft?

c) Zwei Kräfte von 23 und 45 [67 und 89] kg wirken unter einem Winkel von $67^0\,8'$ [$123^0\,4'$] auf einen Körper; welches ist die Richtung und Größe ihrer Resultante?

d) Eine Kraft von 98 [109] kg soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine 76 [87] kg beträgt und mit der Hauptkraft einen Winkel von $54^0\,32'$ [$65^0\,43'$] bildet; wie groß ist die zweite Seitenkraft?

e) Eine Kraft von 10 [11] kg wird in zwei Seitenkräfte von 9 und 8 [7 und 6] kg zerlegt; welchen Winkel bilden die Seitenkräfte miteinander?

f) Zwei Kräfte von 1356 und 1469 [82,8 und 107,9] kg wirken so auf einen Körper, daß ihre Resultante 565 [108,1] kg beträgt; welche Winkel bildet letztere mit den ursprünglichen Kräften?

2. Parallelogramm der Bewegungen.

a) Ein Dampfschiff hat scheinbar einen Weg von 11 [12] km zurückgelegt, in Wirklichkeit aber einen größeren Weg, weil ein Wind, dessen Richtung mit der scheinbaren Schiffsrichtung einen Winkel von 55^0 [66^0] bildete, das Schiff 22^0 [11^0] von der scheinbaren Richtung ablenkte; wie groß ist der wahre Weg?

b) Ein Segelboot fährt so über einen Fluß, dessen Geschwindigkeit 1,5 [1] m in der Sekunde beträgt, daß es stromaufwärts mit dem Ufer einen Winkel von 60^0 [70^0] bildet, und erreicht nach 4 [5] Minuten am jenseitigen Ufer einen Punkt, der 500 [600] m vom Ausgangspunkte entfernt ist; welches ist die wahre Richtung des Schiffes?

c) Ein unter dem Einfluß einer Centralkraft stehender Körper würde sich, wenn letztere plötzlich aufhörte, in der Richtung der Tangente mit einer Geschwindigkeit von 493 [382] m fortbewegen. Durch die Centralkraft erhält der Körper eine Geschwindigkeit von 85 [74] m und zwar in einer Richtung, welche mit der Tangente einen Winkel von 100^0 [99^0] bildet; um welchen Winkel wird der Körper durch die Centralkraft von der Tangente abgelenkt, und mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich in Wirklichkeit (vorausgesetzt, daß die Centralkraft nur jedesmal nach einer Sekunde wirkt)?

d) Ein Dampfschiff legt scheinbar in einer Stunde 14 [15] km zurück, aber ein Strom, der mit der scheinbaren Schiffsrichtung einen Winkel von 70^0 [80^0] bildet, giebt dem Schiffe eine seitliche Geschwindigkeit von 0,2 [0,3] m in der Sekunde; wie groß ist der wahre Weg des Schiffes?

e) Auf ein Atom wirken zwei Kräfte, die eine giebt ihm eine Geschwindigkeit von 12 [15] m, die andere eine Geschwindigkeit von 13 [16] m. Durch das Zusammenwirken beider erhält es eine Geschwindigkeit von 14 [17] m; welchen Winkel bilden die Richtungen der beiden Kräfte miteinander?

f) Ein Komet hat nach dem Beharrungsvermögen eine Geschwindigkeit von 967 [856] m, die Sonne giebt ihm eine Geschwindigkeit von 72 [83] m, so daß er in Wirklichkeit nur eine Geschwindigkeit von 961 [850] m hat; welchen Winkel bildet der Radiusvektor mit der wahren Richtung?

C. Optik.

1. Schatten eines Stabes, wenn sich die Sonne in derselben Vertikalebene wie der Stab befindet.
   a) Ein Stab von 72 [90] cm Länge bildet mit der Horizontalebene einen Winkel von 51° 30′ [50° 30′]; wie lang ist sein Schatten, wenn ihr Höhenwinkel 47° 9′ [7° 21′] beträgt?
   b) Eine Stange von 4,79 [9,106] m Länge wirft, wenn die Sonne unter einem Höhenwinkel von 58° 11′ [51° 9′] gesehen wird, einen Schatten von 3,68 [7,704] m Länge; welchen Winkel bildet der Stab mit seinem Schatten?
   c) Ein Stab von 78,3 [452,7] cm Länge ist gegen die Horizontalebene unter einem Winkel von 67° 30′ [66° 6′] geneigt; wie hoch steht die Sonne, wenn der Schatten 123,4 [346,5] cm lang ist?
2. Gesichtswinkel.
   a) Unter welchem Gesichtswinkel erscheint eine Linie von 9 [6,5] m Länge, wenn das Auge von ihrem einen Ende 7 [5,1] m, von dem anderen 8 [2] m entfernt ist?
   b) Unter welchem Gesichtswinkel erscheint der Abstand zwischen zwei Punkten, die um 1823 [1449] m von einander entfernt sind, wenn das Auge von dem einen Punkt um 2495 [5544] m, von dem anderen um 3186 [6691] m entfernt ist?

D. Praktische Geometrie.

1. Im großen (Geodäsie).
   a) Bei der Gradmessung im Jahre 1846 fand man, daß die Entfernung der beiden „trigonometrischen Punkte" Glienike und Eichberg im Südwesten von Berlin 18800 m beträgt, der Winkel Berlin (Turmspitze der Marienkirche)-Glienike-Eichberg 78° 32′ und der Winkel Glienike-Berlin-Eichberg 37° 5′; welche Größe ergiebt sich darnach für die Entfernung Berlin-Eichberg?
   b) Von dem Leuchtturm auf Helgoland liegt der auf Wangeroog S 1° 35′ O 23,41 sm (Seemeilen) entfernt und der auf Neuwerk S 53° 41′ O 26,68 sm; in welcher Richtung liegt der Leuchtturm auf Neuwerk von dem auf Wangeroog?
   c) Wie groß ist die Entfernung zweier Punkte, zwischen denen sich ein Berg befindet, wenn die Punkte von einem dritten Punkte

2,378 und 3,471 [3,184 und 0,917] km entfernt sind und ihr Abstand in diesem dritten Punkte unter einem Winkel von 53° 47′ [34° 9′] gesehen wird?

d) Vor einem Hafen ragen 3 den Schiffen sehr gefährliche Felsspitzen bei Ebbe eben über das Wasser, die zweite liegt 5 [14,5] km von der ersten, die dritte 3 [11,1] km von der ersten und 4 [4] km von der zweiten entfernt; unter welchem Winkel sieht man von der ersten aus die Verbindungslinie der beiden anderen?

e) Auf der Insel Wangeroog liegt der Leuchtturm S 86° 22′ O 3219 m vom Kirchturm, die Schlüsseltonne vor der Weser (d. h. die im Weserfahrwasser am meisten seewärts liegende Tonne, welche, um anzudeuten, daß man sich in demselben befindet, das Abzeichen von Bremen, einen Schlüssel, trägt) liegt 8880 m vom Leuchtturm und 9620 m vom Kirchturm auf Wangeroog; in welcher Richtung liegt die Tonne von den Türmen? (Die Tonne liegt nördlicher als die Insel.)

2. Im kleinen.

a) Um die Entfernung zweier Punkte, die 335,8 [479] m von einander entfernt sind, von einem dritten Punkte zu bestimmen, welcher jenseits eines Grundstücks liegt, welches man nicht betreten darf, bestimmt man die beiden Winkel, unter welchen von jedem der beiden zugänglichen Punkte der Abstand zwischen den beiden anderen Punkten erscheint und findet 68° 12′ und 57° 9′ [43° 20′ und 54° 18′]; wie groß sind die beiden gesuchten Entfernungen?

b) Zwei Seiten eines dreieckigen Platzes sind 203,7 und 809,5 [48,5 und 84] m lang, die kleinere dieser Seiten bildet mit der dritten einen Winkel von 70° 19′ [21° 31′]; wie groß ist die dritte Seite des Platzes?

c) Von einem Orte am Rande eines Waldes aus werden 2 Wege durch denselben gehauen, die einen Winkel von 45° 46′ [118° 5′] mit einander bilden, der eine erreicht in einer Entfernung von 437 [415] m den gegenüberliegenden geradlinigen Waldrand, der andere in einer Entfernung von 526 [867] m; welche Winkel bilden die Wege mit diesem Waldrande?

d) Zwei Bäume, zwischen denen ein Haus steht, sind von einem dritten Baum aus sichtbar und sind von demselben 123,4 [91,7] und 204,5 [31,2] m entfernt, ihr Abstand erscheint von dem dritten Baum aus unter einem Winkel von 59° 39′ [33° 7′]; wie weit sind die beiden Bäume von einander entfernt?

e) Die Seiten eines dreieckigen Teiches sind 50, 70 und 90 [50, 120 und 130] m lang; wie groß ist der Winkel, den die beiden ersten Seiten mit einander bilden?

f) Von zwei Punkten am Rande einer Wiese, die 61 [341] m von einander entfernt sind, sollen Wege durch dieselbe nach einem

dritten Punkte hin gelegt werden, welcher von dem ersten 106 [260] m, von dem zweiten 151 [158] m entfernt ist; welche Winkel bilden die Wege mit der Verbindungslinie der beiden ersten Punkte?

E. Heliocentrische Länge und Planetenabstände (unter der Voraussetzung, daß sich die Planeten in der Ekliptik befinden und daß die Planetenbahnen kreisförmig sind).

1. Wieviel mittlere Erdbahnradien beträgt der Abstand der Venus von der Erde, wenn ihr Abstand von der Sonne unter einem Winkel von $39^\circ 15'$ [$40^\circ 16'$] erscheint zu einer Zeit, wo die heliocentrische Länge der Erde $190^\circ 17'$ [$191^\circ 18'$] und die der Venus $117^\circ 20'$ [$118^\circ 21'$] beträgt?
2. Der mittlere Abstand des Mars von der Sonne beträgt 1,524 mittlere Erdbahnradien; wie groß ist der Unterschied der heliocentrischen Länge von Erde und Mars, wenn der Mars scheinbar um $117^\circ 9'$ [$79^\circ 11'$] von der Sonne entfernt ist?
3. Der mittlere Abstand des Jupiter von der Sonne beträgt 5,203 mittlere Erdbahnradien; unter welchem Winkel erscheint der Abstand des Jupiter von der Sonne, wenn der heliocentrische Längenunterschied von Erde und Jupiter $59^\circ 17'$ [$60^\circ 18'$] beträgt?
4. Der mittlere Abstand der Venus von der Sonne beträgt 0,7233 mittlere Erdbahnradien; wie weit ist die Venus von der Erde entfernt, wenn der heliocentrische Längenunterschied $78^\circ 26'$ [$67^\circ 15'$] beträgt?
5. Mars ist von der Sonne etwa 1,5 mittlere Erdbahnradien entfernt; unter welchem Winkel müßte der Abstand zwischen Mars und Sonne von der Erde aus erscheinen, wenn der Mars von der Erde 1,2 [1,3] Erdbahnradien entfernt ist?
6. Saturn hat von der Sonne einen mittleren Abstand von 9,539, Uranus von 19,18 mittleren Erdbahnradien; wie groß ist der heliocentrische Längenunterschied dieser beiden Planeten, wenn ihr Abstand von einander 12,73 [11,62] mittlere Erdbahnradien beträgt?

F. Nautik.

1. Stromschiffahrt.
   a) Gegeben ist der wahre Weg und die Strömung.
      α) (Die scheinbare Geschwindigkeit des Schiffes ist größer als die Geschwindigkeit des Stromes.) Mit welchem Kurs und in wieviel Stunden erreicht bei einer Fahrt von 7 Knoten ein Schiff von A aus einen Ort B, der NW $\frac{1}{2}$ W 45 sm weit liegt, wenn der Strom dasselbe stündlich 2 sm nach NzO treibt?

β) (Die Stromgeschwindigkeit ist größer als die scheinbare Geschwindigkeit des Schiffes.) In einem großen Flusse hat das Wasser eine Geschwindigkeit von 5 sm in der Stunde nach N $\frac{1}{2}$ W. Von einem Orte A am linken Ufer will ein mit einer (scheinbaren) Geschwindigkeit von 4 Knoten fahrendes Schiff einen Ort am anderen Ufer des Flusses erreichen, der NO $\frac{1}{2}$ N 4,5 sm entfernt liegt; welchen Kurs muß das Schiff wählen?

b) Gegeben ist der scheinbare Weg und die Strömung. Der scheinbare Weg eines Schiffes ist SW $\frac{1}{2}$ W 157 sm, während ein Strom das Schiff um 31,9 sm nach NzW treibt; welches ist der wahre Weg des Schiffes?

c) Gegeben ist der scheinbare und der wahre Weg. Logge und Kompaß ergeben den scheinbaren, die astronomische Ortsbestimmung des Anfangs- und Endpunktes den wahren Weg (nach § 9, C, 1 b). Wenn diese beiden Bestimmungsmethoden zu Ergebnissen führen von größerer Verschiedenheit, als man bei der Ungenauigkeit der ersteren Methode gewohnt ist, so schließt man daraus, daß eine Strömung die Fahrt beeinflußt hat. — Ein Schiff segelt in 14 Stunden scheinbar von A nach B NNW 127 sm, während die astronomische Berechnung ergiebt, daß der wahre Weg AC N 8° 26′ W 141,2 sm ist; welches ist die Richtung und die Stärke der Strömung?

2. Verschiedenes.

a) Von einem Schiffe aus sieht man das Leuchtfeuer B auf Norderney in SW, segelt dann WzS 9 sm nach C und sieht nun das Feuer in SSO; wie groß ist BC?

b) Das Leuchtfeuer A auf Wangeroog liegt S 1° 35′ O 23,41 sm von B, d. h. dem Leuchtfeuer auf Helgoland. Von einem Schiffe in C aus sieht man A in SO $\frac{1}{2}$ O und B in NNO; wie groß ist AC und BC?

c) Lavieren. Ein Schiff in A hat gegen SWwind nach einem Orte B zu segeln, welcher SzW 40 sm von ihm liegt; wie lang ist der Weg, den das Schiff beim Lavieren zurückgelegt hat, wenn es mit der Windrichtung Winkel von 6 Strich bildet?

d) Jagdsegeln. Ein Sklavenschiff in B eilt in NNW-Richtung mit einer Fahrt von 4 Knoten einem Schlupfwinkel zu; welchen Kurs muß ein in A, welches O $\frac{1}{2}$ S von B liegt, gleichzeitig abfahrender Kreuzer von 7 Knoten Geschwindigkeit wählen, um das Sklavenschiff zu erreichen?

e) Zwei Schiffe sind in A und B 5 sm von einander entfernt (B liegt nördlicher als A), das eine segelt von A aus mit

einer Fahrt von 9 Knoten nach OzN und erreicht in C nach 40 Minuten das andere, welches mit einer Geschwindigkeit von 6 Knoten fährt; welchen Kurs hat letzteres gesteuert?

G. Rechtwinkelige Dreiecke in Verbindung mit schiefwinkeligen.

1. Durchgang des Lichtes durch eine Glasplatte $\left(\text{Brechungsexponent } \frac{3}{2}\right)$. Anwendung des Brechungsgesetzes von Snellius.
   a) Auf eine 11 mm dicke Glasplatte trifft ein Strahl mit einem Einfallswinkel von 30^0; wie weit ist die Austrittsstelle von demjenigen Punkt entfernt, in welchem der Strahl das Glas verlassen würde, wenn er ungebrochen hindurch ginge?
   b) Wie dick ist eine Glasplatte, bei welcher ein Strahl, welcher dieselbe unter einem Einfallswinkel von $26^0\,34'$ trifft, 4,1 mm von derjenigen Stelle austritt, in welcher er das Glas verlassen würde, wenn er ungebrochen hindurch ginge?
   c) Ein Lichtstrahl geht so durch eine Glasplatte, daß er innerhalb derselben mit dem Einfallslote einen Winkel von $38^0\,47'\,24''$ bildet und 50 mm von der Stelle austritt, in welcher er das Glas verlassen würde, wenn er ungebrochen hindurch ginge; wie dick ist die Platte?
   d) Durch einen Glaswürfel, dessen Kanten 110 mm betragen, geht ein Lichtstrahl so, daß er mit dem Einfallslote innerhalb des Würfels einen Winkel von $17^0\,21'$ bildet; wie weit von der Stelle tritt der Strahl aus, in welcher er den Würfel verlassen würde, wenn er ungebrochen hindurch ginge?

2. Höhenmessung.
   a) Mit Hülfe einer Linie, in deren Verlängerung der Fußpunkt der zu messenden Höhe liegt.
      α) Messung von unten. Um die Höhe eines Turmes zu ermitteln, mißt man eine Strecke von 30 m ab, in deren Verlängerung die Mitte der Grundfläche des Turmes liegt. Von den Enden A und B dieser Strecke erscheint die Spitze C des Turmes unter den Höhenwinkeln 30^0 und 60^0; wie hoch ist der Turm?
      β) Messung von oben. Von der Spitze eines Berges aus sieht man zwei Punkte in der Ebene, welche genau hinter einander liegend erscheinen, unter den Depressionswinkeln $12^0\,17'$ und $18^0\,55'$; wie hoch ist der Berg, wenn die beiden Punkte 2 km von einander entfernt sind?
   b) Mit Hülfe einer Linie, in deren Verlängerung der Fußpunkt nicht liegt.

α) Messung von unten. Um die Höhe eines Berges zu bestimmen, mißt man in der Ebene eine Strecke ab von 1600 m. Von dem einen Ende derselben A erscheint die Bergesspitze C unter einem Höhenwinkel von 23° 19′ und der Abstand zwischen dem andern Ende B und der Bergesspitze unter dem Winkel 86° 43′; der Winkel ABC beträgt 87° 12′; wie hoch ist der Berg?

β) Messung von oben. Aus einem Luftballon sieht man zwei Punkte A und B in der Ebene, die 3,5 km von einander entfernt sind, unter den Depressionswinkeln 47° 19′ und 53° 47′ und ihr Abstand erscheint unter einem Sehwinkel von 49° 27′; wie hoch befindet sich das Auge C des Beobachters über der Ebene?

III. Sphärische Trigonometrie.

A. Das rechtwinkelige Dreieck.

§ 12. Ohne Anwendung.

Gesucht sind von den Seiten und Winkeln des Dreiecks die 3 nicht gegebenen Stücke.

A. Gegeben sind die beiden Katheten a und b.

1.*) a) $a = 23° 24′$, $b = 25° 26′$. b) $a = 27° 28′$, $b = 30° 31′$.
c) $a = 32° 33′ 34″$, $b = 35° 36′ 37″$. d) $a = 90°$, $b = 38° 39′$.

2. a) $a = 20° 30′$, $b = 120° 30′$. b) $a = 30° 40′$, $b = 130° 40′$.
c) $a = 110° 20′$, $b = 140° 50′$. d) $a = 90°$, $b = 134° 56′$.

B. Gegeben sind die Hypotenuse c und eine Kathete.

1. a) $c = 58° 48′$, $a = 38° 28′$. b) $c = 67° 8′$, $a = 34° 56′$.
c) $c = 40° 40′ 40″$, $a = 27° 27′ 27″$ d) $c = 90°$, $a = 70° 50′$.

2. a) $c = 135° 7′$, $a = 24° 6′$. b) $c = 111° 11′$, $a = 33° 33′$.
c) $c = 159° 13′$, $a = 170° 20′$. d) $c = 90°$, $a = 91° 19′$.

C. Gegeben sind eine Kathete und der anliegende schiefe Winkel.

1. a) $a = 36° 37′$, $\beta = 38° 39′$. b) $a = 63° 53′ 43″$, $\beta = 36° 35′ 34″$
c) $a = 63° 7′ 3″$, $\beta = 83° 9′ 3″$. d) $a = 90°$, $\beta = 19° 29′$.

---

*) In diesem Paragraphen ist unter 1) keins der gegebenen Stücke größer als 90°; unter 2) ist ein Stück, oder es sind beide über 90°.

2. a) $a = 99^0 9'$, $\beta = 17^0 17'$. b) $a = 110^0 10' 10''$, $\beta = 10^0 10' 10''$.
c) $a = 45^0 48'$, $\beta = 94^0 12'$. d) $a = 90^0$, $\beta = 118^0 19'$.

D. Gegeben sind eine Kathete und der gegenüberliegende schiefe Winkel.*)

1. a) $a = 44^0 55'$, $\alpha = 55^0 44'$. b) $a = 33^0 44' 55''$, $\alpha = 66^0 33' 44''$.
c) $a = 77^0 7' 7''$, $\alpha = 87^0 6' 54''$. d) $a = 23^0 45' 6''$, $\alpha = 34^0 56' 7''$.
2. a) $a = 110^0 20'$, $\alpha = 110^0 10'$. b) $a = 170^0 34' 51''$, $\alpha = 99^0 9' 9''$.
c) $a = 123^0 45' 6''$, $\alpha = 101^0 11' 11''$.
d) $a = 103^0 13' 13''$, $\alpha = 102^0 12' 12''$.

E. Gegeben sind die Hypotenuse und ein schiefer Winkel.

1. a) $c = 65^0 43'$, $\alpha = 43^0 21'$. b) $c = 87^0 6' 54''$, $\alpha = 54^0 32' 1''$.
c) $c = 87^0 6' 54''$, $\alpha = 76^0 54' 32''$. d) $c = 90^0$, $\alpha = 80^0 7'$.
2. a) $c = 123^0 45'$, $\alpha = 67^0 8'$. b) $c = 135^0 7' 9''$, $\alpha = 9^0 7' 53''$.
c) $c = 12^0 35'$, $\alpha = 98^0 7'$ d) $c = 147^0 26'$, $\alpha = 159^0 27'$.

F. Gegeben sind die beiden schiefen Winkel.

1. a) $\alpha = 49^0 51'$, $\beta = 44^0 12'$. b) $\alpha = 28^0 30'$, $\beta = 74^0 28' 10''$.
c) $\alpha = 64^0 16' 14''$, $\beta = 45^0 27' 22''$. d) $\alpha = 90^0$, $\beta = 30^0$.
2. a) $\alpha = 121^0 4'$, $\beta = 57^0 12'$. b) $\alpha = 129^0 1'$, $\beta = 59^0 28' 20''$.
c) $\alpha = 106^0 45' 7''$, $\beta = 148^0 21' 10''$. d) $\alpha = 117^0 44'$, $\beta = 90^0$.

§ 13. Anwendungen.

A. Ableitungen aus der Polhöhe und der Deklination der Sonne.

1. Auf- und Untergang, Tag- und Nachtbogen, Stundenwinkel (= wahre Ortszeit).
a) Die Deklination ist gleichartig mit der Polhöhe. An der Nordwestküste von Frankreich unter $48^0 14'$ nördlicher Breite geht an einer bestimmten Stelle die Sonne am 20. April um $7^h 17^m$ Greenwicher Zeit unter; bei welchem Azimut findet dieses statt, wie groß sind Tag- und Nachtbogen, und wie groß ist der Stundenwinkel? Aus dem nautischen Jahrbuche ergiebt sich, daß die Deklination δ der Sonne zu der angegebenen Zeit $+ 11^0 48'$ beträgt.

*) Man erhält für die 8 gesuchten Stücke je 2 Werte.

b) Die Deklination ist der Polhöhe entgegengesetzt. Am 10. November geht an einer Stelle des Nordostrandes des stillen Ozeans unter 53° nördl. Breite die Sonne nachmittags 4 Uhr Greenwicher Zeit auf; bei welchem Azimut findet dieses statt, wie groß sind Tag- und Nachtbogen, und wie groß ist der Stundenwinkel? Die Deklination der Sonne beträgt zu dieser Zeit — 17° 21′.

2. Magnetische Deklination.

a) Die magnetische Deklination ist westlich. Östlich von Japan unter 40° 50′ nördl. Breite geht bei einer Deklination von + 20° 21′ die Sonne scheinbar (d. h. nach Angabe der Nordrichtung durch den Kompaß) N 50° W unter; wie groß ist die magnetische Deklination?

b) Die magnetische Deklination ist östlich. Westlich von Südnorwegen unter 60° 10′ nördl. Breite geht bei einer Deklination von + 10° 20′ die Sonne scheinbar N 88° W unter; wie groß ist die magnetische Deklination?

3. Höhe und Azimut im Sechsuhrkreis.

a) Die Deklination ist gleichartig mit der Polhöhe. Welche Höhe und welches Azimut hat die Sonne am 17. Mai nachmittags 6 Uhr Ortszeit unter 39° 50′ nördl. Breite und 15° westlich von Greenwich? Die Deklination der Sonne beträgt am 17. Mai abends 7 Uhr Greenwicher Zeit + 19° 31′.

b) Die Deklination ist der Polhöhe entgegengesetzt. Wenn die Polhöhe 52° 35′ und die Deklination — 22° 23′ beträgt und die Sonne abends im Sechsuhrkreise steht, wie groß ist dann Höhe und Azimut?

4. Höhe und Stundenwinkel im ersten Vertikal.

a) Die Deklination ist gleichartig mit der Polhöhe. Wie groß ist der Höhenwinkel der genau im Westen stehenden Sonne, und welches ist die Ortszeit, wenn unter 35° 20′ nördl. Breite die Deklination der Sonne + 6° 10′ beträgt?

b) Die Deklination ist der Polhöhe entgegengesetzt. Wenn die Sonne unter 52° nördl. Breite bei einer Deklination von — 18° 58′ genau im Osten steht, wie groß ist dann die Höhe und der Stundenwinkel?

B. Bestimmung der Polhöhe auf dem Festlande mit dem Theodoliten.

1. Durch die größte östliche und westliche Digression eines Cirkumpolarsternes bei gegebenem Azimutalunterschied.

a) Unter welcher geographischen Breite befindet man sich, wenn der Azimutalunterschied der größten Digressionen des Shedir (α Cassiopeiae), dessen Deklination + 55° 57′ ist, 72° 33′ beträgt?

b) Auf welchem Breitenkreise befindet sich ein Beobachter, der die vertikale Höhenzunahme des Dubhe (α Ursae majoris), dessen Deklination $+ 62^{0}\,19'$ ist, $55^{0}\,22'$ östlicher wahrnimmt, als die vertikale Höhenabnahme?

2. Durch zwei Höhen eines Sternes in demselben Azimut.

a) Wie groß ist die Polhöhe, wenn Cochab (β Ursae minoris), dessen Deklination $+ 74^{0}\,35'$ ist, bei einem Höhenwinkel von $60^{0}\,50'$ und $50^{0}\,40'$ dasselbe Azimut hat?

b) Der Stern γ Ursae majoris hat eine Deklination von $+ 54^{0}\,17'$; unter welcher Breite befindet man sich, wenn dieser Stern unter den Höhenwinkeln $59^{0}\,10'$ und $49^{0}\,20'$ durch denselben Höhenkreis geht?

3. Aus dem Stundenwinkel eines Sternes bei seinem Durchgang durch den ersten Vertikal.

a) Der Durchgang findet durch den westlichen Teil des ersten Vertikals statt. Unter welcher Breite befindet sich ein Ort, an welchem Aldebaran (α Tauri), dessen Deklination $+ 16^{0}\,18'$ ist, mit einem Stundenwinkel von $4^{h}\,5^{m}$ durch den ersten Vertikal geht?

b) Der Durchgang findet durch den östlichen Teil des ersten Vertikals statt. Unter welcher geographischen Breite würde nur beobachtet werden können, daß bei einem Stundenwinkel von $18^{h}\,17^{m}$ Capella (α Aurigae), dessen Deklination $+ 45^{0}\,53'$ ist, durch den ersten Vertikal geht?

C. Sonstiges.

1. Bestimmung des Nordpunktes durch zwei Höhen eines Sternes in demselben Azimut.

a) In welchem Azimut kann Wega (α Lyrae), dessen Deklination $+ 38^{0}\,41'$ ist, die Höhenwinkel $29^{0}\,30'$ und $50^{0}\,28'$ haben?

b) Wenn Deneb (α Cygni), dessen Deklination $+ 44^{0}\,54'$ ist, bei gleichem Azimut die Höhenwinkel $53^{0}\,10'$ und $37^{0}\,20'$ hat, wie groß ist dann dieses Azimut?

2. Bestimmung des nördlichsten Punktes auf einer Fahrt im größten Kreise.

a) (Fahrt nach Westen.) Von Oporto unter $41^{0}\,9'$ nördl. Breite und $8^{0}\,37'$ westlich von Greenwich fährt ein Schiff nach WzN; wo erreicht es bei einer Fahrt im größten Kreise den nördlichsten Punkt?

b) (Fahrt nach Osten.) Von Boston unter $42^{0}\,20'$ nördl. Breite und $70^{0}\,53'$ westlich von Greenwich fährt ein Schiff nach ONO; wo erreicht es bei einer Fahrt im größen Kreise seinen nördlichsten Punkt?

B. Das schiefwinkelige Dreieck.

§ 14. Ohne Anwendung.

Gesucht sind von den Seiten und Winkeln des Dreiecks die 3 nicht gegebenen Stücke.

A. Gegeben sind die drei Seiten.

1.*) a) $a = 22^0\,17'$, $b = 39^0\,38'$, $c = 35^0\,31'$.
b) $a = 53^0\,7'$, $b = 22^0\,55'$, $c = 46^0\,53'$.
c) $a = 90^0$, $b = 70^0\,20'$, $c = 42^0\,8'$.
d) $a = 90^0$, $b = 90^0$, $c = 26^0\,25'$.

2. a) $a = 98^0\,43'$, $b = 61^0\,42'$, $c = 42^0\,23'$.
b) $a = 125^0\,30'$, $b = 163^0\,47'$, $c = 58^0\,8'$.
c) $a = 104^0\,29'$, $b = 107^0\,40'$, $c = 111^0\,55'$.
d) $a = 102^0\,59'$, $b = 136^0\,34'$, $c = 90^0$.

B. Gegeben sind die drei Winkel.

1. a) $\alpha = 59^0\,48'$, $\beta = 85^0\,37'$, $\gamma = 60^0\,10'$.
b) $\alpha = 83^0\,18'$, $\beta = 44^0\,45'$, $\gamma = 61^0\,41'$.
c) $\alpha = 79^0\,14'$, $\beta = 24^0\,8'$, $\gamma = 89^0\,6'$.
d) $\alpha = 78^0\,49'$, $\beta = 45^0\,6'$, $\gamma = 67^0\,49'$.

2. a) $\alpha = 155^0\,57'$, $\beta = 121^0\,7'$, $\gamma = 123^0\,24'$.
b) $\alpha = 97^0\,8'$, $\beta = 101^0\,9'$, $\gamma = 60^0\,10'$.
c) $\alpha = 114^0\,21'$, $\beta = 83^0\,22'$, $\gamma = 42^0\,6'$.
d) $\alpha = 99^0\,9'$, $\beta = 48^0\,6'$, $\gamma = 52^0\,7'$.

C. Gegeben sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel.**)

1. a) $a = 56^0\,45'$, $b = 44^0\,27'$, $\gamma = 50^0\,10'$.
b) $a = 56^0\,8'$, $b = 60^0\,4'$, $\gamma = 65^0\,16'$.
c) $a = 90^0$, $b = 17^0\,32'$, $\gamma = 77^0\,38'$.
d) $a = 90^0$, $b = 90^0$, $\gamma = 14^0\,8'$.

---

*) In diesem Paragraph ist von A bis D unter 1) keins der gegebenen Stücke größer als 90°, unter 2) ist mindestens eins über 90°.

**) Ist nur nach der dritten Seite gefragt, so ist die Anwendung der Neperschen Analogien unzweckmäßig, und die Anwendung eines Hilfswinkels φ führt schneller zum Ziel. $\tan\varphi = \tan a \cos\gamma$ und dann $\cos c = \frac{\cos a \cdot \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}$. — Ebenso ist es bei D, wenn nur der dritte Winkel gesucht wird. $\tan\varphi = \tan\beta\cos a$ und $\cos\alpha = \frac{\cos\beta\cos(\gamma-\varphi)}{\cos\varphi}$.

2. a) $a = 94^0\,5'$, $b = 86^0\,27'$, $\gamma = 150^0\,32'$.
   b) $a = 55^0\,7'$, $b = 51^0\,15'$, $\gamma = 157^0\,18'$.
   c) $a = 166^0\,9'$, $b = 98^0\,23'$, $\gamma = 47^0\,6'$.
   d) $a = 157^0\,46'$, $b = 148^0\,6'$, $\gamma = 178^0\,28'$.

D. Gegeben sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.*)

1. a) $a = 70^0\,8'$, $\beta = 72^0\,29'$, $\gamma = 82^0\,5'$.
   b) $a = 87^0\,8'$, $\beta = 11^0\,9'$, $\gamma = 52^0\,9'$.
   c) $a = 30^0\,34'$, $\beta = 23^0\,25'$, $\gamma = 22^0\,9'$.
   d) $a = 90^0$, $\beta = 43^0\,35'$, $\gamma = 37^0\,7'$.
2. a) $a = 96^0\,48'$, $\beta = 25^0\,25'$, $\gamma = 41^0\,5'$.
   b) $a = 41^0\,6'$, $\beta = 174^0\,58'$, $\gamma = 49^0\,10'$.
   c) $a = 95^0\,40'$, $\beta = 158^0\,26'$, $\gamma = 123^0\,8'$.
   d) $a = 90^0$, $\beta = 141^0\,8'$, $\gamma = 82^0\,9'$.

E. Gegeben sind zwei Seiten und der Gegenwinkel (α) der einen.

1. $a + b < 180^0$.
   a) $a > b$.
      α) $a = 75^0\,57'$, $b = 69^0\,4'$, $\alpha = 82^0\,3'$.
      β) $a = 128^0\,19'$, $b = 38^0\,28'$, $\alpha = 127^0\,30'$.
   b) $a < b$. Zwei Dreiecke.
      α) $a = 38^0\,4'$, $b = 65^0\,58'$, $\alpha = 32^0\,33'$.
      β) $a = 29^0\,55'$, $b = 148^0\,26'$, $\alpha = 69^0\,49'$.
2. $a + b = 180^0$.
   a) $(a > b)$; $a = 129^0\,12'$, $b = 50^0\,48'$, $\alpha = 120^0\,9'$.
   b) $(a < b)$; $a = 2^0\,58'$, $b = 177^0\,2'$, $\alpha = 28^0\,1'$.
3. $a + b > 180^0$.
   a) $(a < b)$; $a = 104^0\,3'$, $b = 109^0\,52'$, $\alpha = 97^0\,57'$.
   b) $a < b$. Zwei Dreiecke.
      α) $a = 178^0\,2'$, $b = 3^0\,43'$, $\alpha = 152^0\,59'$.
      β) $a = 141^0\,56'$, $b = 114^0\,2'$, $\alpha = 147^0\,21'$.

---

*) Ist nur nach der dritten Seite gefragt, so ist die Anwendung der Neperschen Analogien unzweckmäßig, und die Anwendung eines Hilfswinkels φ führt schneller zum Ziel. $\tan g\,\varphi = \tan g\,a \cos\gamma$ und dann $\cos c = \frac{\cos a \cdot \cos(b - \varphi)}{\cos\varphi}$. — Ebenso ist es bei D, wenn nur der dritte Winkel gesucht wird. $\tan g\,\varphi = \tan g\,\beta \cos a$ und $\cos\alpha = \frac{\cos\beta\,\cos(\gamma - \varphi)}{\cos\varphi}$.

F. Gegeben sind zwei Winkel und die Gegenseite (a) des einen.

1. $\alpha + \beta < 180^0$.
   a) $(\alpha > \beta)$; $\alpha = 56^0 54'$, $\beta = 21^0 11'$, $a = 57^0 21'$.
   b) $\alpha < \beta$. Zwei Dreiecke.
      α) $\alpha = 46^0 45'$, $\beta = 56^0 43'$, $a = 60^0 13'$.
      β) $\alpha = 60^0 5'$, $\beta = 95^0 24'$, $a = 51^0 13'$.
2. $\alpha + \beta = 180^0$.
   a) $(\alpha > \beta)$; $\alpha = 134^0 15'$, $\beta = 45^0 45'$, $a = 121^0 24'$.
   b) $(\alpha < \beta)$; $\alpha = 9^0 29'$, $\beta = 170^0 31'$, $a = 85^0 19'$.
3. $\alpha + \beta > 180^0$.
   a) $(\alpha < \beta)$; $\alpha = 110^0 10'$, $\beta = 130^0 30'$, $a = 127^0 59'$.
   b) $\alpha > \beta$. Zwei Dreiecke.
      α) $\alpha = 133^0 19'$, $\beta = 51^0 3'$, $a = 125^0 8'$.
      β) $\alpha = 112^0 43'$, $\beta = 108^0 34'$, $a = 113^0 49'$.

§ 15. Anwendungen.

A. Kürzeste Linien auf der Erdkugel. Der dritte Winkelpunkt ist der Nordpol.

1. Entfernungen.
   a) Wieviel geographische Meilen beträgt die Entfernung von Straßburg im Elsaß unter $48^0 35'$ nördl. Breite und $7^0 46'$ östlich von Greenwich bis Königsberg in Ostpreußen unter $54^0 43'$ nördl. Breite und $20^0 30'$ östlich von Greenwich?
   b) Wieviel Kilometer beträgt die Entfernung von Lissabon unter $38^0 42{,}5'$ nördl. Breite und $9^0 11'$ westlich von Greenwich bis Shanghai unter $31^0 14'$ nördl. Breite und $121^0 29'$ östlich von Greenwich?
2. Richtung bei der Schiffahrt im größten Kreise.
   a) Brest liegt unter $48^0 23'$ nördl. Breite und $4^0 30'$ westlich von Greenwich, Cayenne unter $5^0 17'$ nördl. Breite und $52^0 33'$ westlich von Greenwich; welchen Winkel muß die Fahrrichtung auf einer Fahrt im größten Kreise bei der Abfahrt von Brest und bei der Ankunft in Cayenne mit dem Meridian bilden?
   b) Von Hongkong $22^0 12'$ N und $114^0 16'$ O fährt nach Valparaiso $33^0 1'$ S und $71^0 42'$ W ein Schiff im größten Kreise; unter welchem Windstrich fährt es ab, und unter welchem kommt es an?

B. Breitenbestimmung.

1. Durch eine Höhe in der Nähe des Meridians.
   a) (Mittagsonne.) Am 6. Januar, als die Deklination der Sonne $-22^0 28'$ betrug, wurde bei einem Stundenwinkel von $0^h 59^m 52^s$

als Höhenwinkel der Sonne $20^0\,50'$ gefunden; unter welcher geographischen Breite befand man sich?

b) (Mitternacht-Fixstern.) Unter welcher geographischen Breite befindet man sich, wenn Algenib (α Persei), dessen Deklination $+\ 49^0\,29'$ ist, bei einem Stundenwinkel von $11^h\,11^m\,11^s$ unter einem Höhenwinkel von $20^0\,10'$ erscheint?

2. Durch gleiche Höhen desselben Gestirnes. Die vorliegenden Beispiele beziehen sich auf den Südhimmel, erst nimmt die Höhe zu, dann ab.

a) Wie groß ist die Polhöhe für einen Beobachtungsort, an welchem Benetnasch (η Ursae majoris), dessen Deklination $+\ 49^0\,51'$ ist, bei einem Azimutalunterschied von $163^0\,44'$ in derselben Höhe von $50^0\,47'$ erscheint?

b) Welches ist die geographische Breite eines Ortes, an welchem Beteigeuze (α Orionis), dessen Deklination $+\ 7^0\,23'$ ist, bei einem Azimutalunterschiede von $144^0\,36'$ in derselben Höhe von $30^0\,40'$ erscheint?

C. Bestimmung des Azimutes.

1. Es ist nur nach dem Azimut gefragt.

a) Durch eine Höhe. Bei welchem Azimut erreicht die Sonne für Berlin, also unter $52^0\,30'$ nördl. Breite, am 20. Juni nachmittags, bei einer Deklination von $+\ 23^0\,27'$ einen Höhenwinkel von $49^0\,43'$?

b) Aus dem Stundenwinkel. Unter welchem Azimut erscheint die Sonne in Hamburg, also unter $53^0\,33'$ N, am Nachmittag des dritten Oktober bei einer Deklination von $-\ 3^0\,57'$ um $4^h\,15^m$ (wahre Ortszeit)?

2. Bestimmung der magnetischen Deklination.

a) Mit Hilfe des Höhenwinkels. Am Nachmittag des 20. August bei einer Deklination von $+\ 12^0\,28'$ erscheint die Sonne in Wien, also $48^0\,13'$ N, unter einem Höhenwinkel von $50^0\,17'$ und zwar unter einem (scheinbaren) Azimut von $222^0\,48'$ (von N über O); wie groß ist die magnetische Deklination in Wien?

b) Aus dem Stundenwinkel. Unter $62^0\,44'$ N erscheint die Sonne bei einer Deklination von $+\ 0^0\,48'$ um $5^h\,1^m$ nachmittags (wahre Ortszeit) unter einem scheinbaren Azimut von $248^0\,59'$; wie groß ist die magnetische Deklination?

D. Bestimmung des Stundenwinkels.

1. Es ist nur nach dem Stundenwinkel gefragt.

a) Die Polhöhe betrage $51^0\,32'$, die Deklination $+\ 19^0\,39'$, der Höhenwinkel $38^0\,19'$; wie groß ist der Stundenwinkel?

b) Die Polhöhe betrage $14^0\,3'$, die Deklination $+\,19^0\,9'$, der Höhenwinkel $20^0\,56'$; wie groß ist der Stundenwinkel?

2. Kontrolle des Standes einer Uhr.

a) Unter $18^0\,19'$ N erscheint die Sonne bei einer Deklination von $20^0\,21'$ unter einem Höhenwinkel von $22^0\,24'$, während die Uhr (nachmittags) $5^h\,6^m$ zeigt; um wieviel geht dieselbe vor oder nach?

b) Um wieviel muß eine Uhr vor- oder zurückgestellt werden unter $60^0\,7'$ N, wenn es nach derselben (nachmittags) $4^h\,7^m$ ist, während die Sonne bei einer Deklination von $-\,7^0\,6'$ unter einem Höhenwinkel von $6^0\,5'$ erscheint?

E. Bestimmung der geographischen Länge.

1. Einfachster Fall.

a) Unter welcher geographischen Länge befindet man sich, wenn die Sonne unter $45^0\,49'$ N bei einer Deklination von $+\,17^0\,53'$ unter einem Höhenwinkel von $37^0\,18'$ erscheint, während eine nach Greenwicher Zeit gehende Uhr $9^h\,20^m$ zeigt?

b) Bei einer Deklination von $-\,15^0\,51'$ beträgt der Höhenwinkel der Sonne zur Zeit, wo es in Greenwich $4^h\,4^m$ ist, unter $23^0\,41'$ N $7^0\,10'$; wie weit befindet man sich östlich von Greenwich?

2. Das tägliche astronomische Hauptproblem der Nautik.

a) Ohne Berücksichtigung der Nebenumstände.

α) Auf einer Fahrt von Aden nach dem Persischen Meerbusen findet man am 9. April mittags (Ortszeit) und um 8 Uhr morgens Greenwicher Zeit als Höhenwinkel der Sonne $87^0\,40'$, segelt darauf 31 sm $0\frac{1}{4}$S und mißt um 11^h vormittags Greenwicher Zeit den Höhenwinkel der Sonne zu $44^0\,48'$. Unter welcher Breite und Länge befand man sich mittags (Ortszeit)? Die Deklination der Sonne ist bei der ersten Beobachtung $7^0\,42{,}3'$, bei der zweiten $7^0\,45'$.

β) Am 21. Januar wird südwestlich von der Insel Cuba um $6\frac{1}{2}$ Uhr abends Greenwicher Zeit als Höhenwinkel der Sonne bei ihrer Kulmination $49^0\,30'$ gefunden. Das Schiff segelt darauf 13 sm nach WSW und man mißt nun abends $9^h\,9^m\,12^s$ Greenwicher Zeit den Höhenwinkel der Sonne zu $22^0\,48'$. Wo befand sich das Schiff bei der ersten Messung? Die Deklinationen der Sonne waren $-\,19^0\,50'$ und $-\,19^0\,48'$.

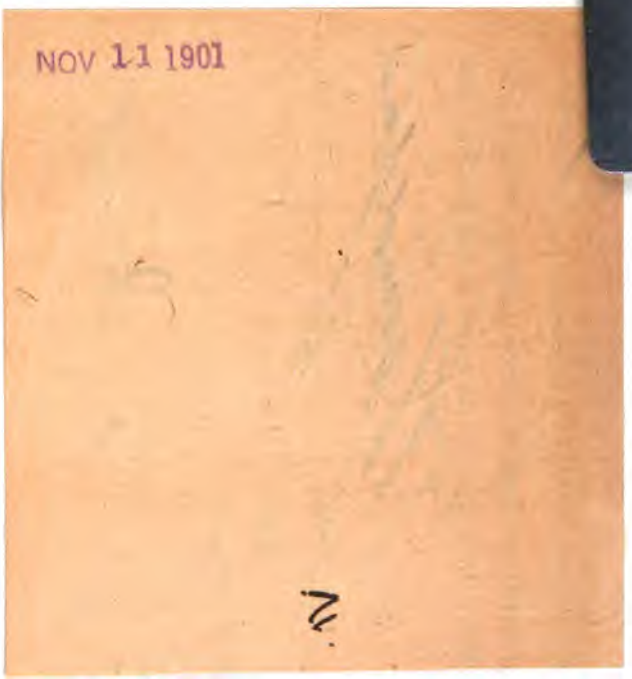
b) Mit Berücksichtigung der Nebenumstände.

α) (Die Nebenumstände haben großen Einfluß.) Am 2. November 4 Uhr nachmittags mittlerer Greenwicher Zeit (m. Gr. Z.)

wird westlich von Südgrönland bei 15,5 m Augeshöhe als Kulminationshöhe des Sonnenunterrandes $14^{0}\,47'$ gefunden. Darauf wird 11 sm nach SW gesegelt und abends $7^{h}\,51^{m}$ m. Gr. Z. als Höhenwinkel des Sonnenunterrandes $2^{0}\,21'$ gefunden. Die Temperatur beträgt zur Zeit beider Beobachtungen — 12^{0} und der Luftdruck 780 mm; wo befindet man sich bei der ersten Beobachtung? — Die den Höhenmessungen entsprechenden Deklinationen sind — $14^{0}\,58'\,29''$ und — $15^{0}\,1'\,29''$, die atmosphärische Strahlenbrechung bei normalem Luftzustand $3'\,36''$ und $16'\,37''$, die Vergrößerung derselben wegen der Temperatur $19''$, beziehungsweise $1'\,47''$ und wegen des Luftdruckes außerdem noch $8''$ und $39''$. Der Sonnenradius ist $16'\,10''$, die Kimmtiefe $7'$ und die Zeitgleichung — $16^{m}\,21^{s}$.

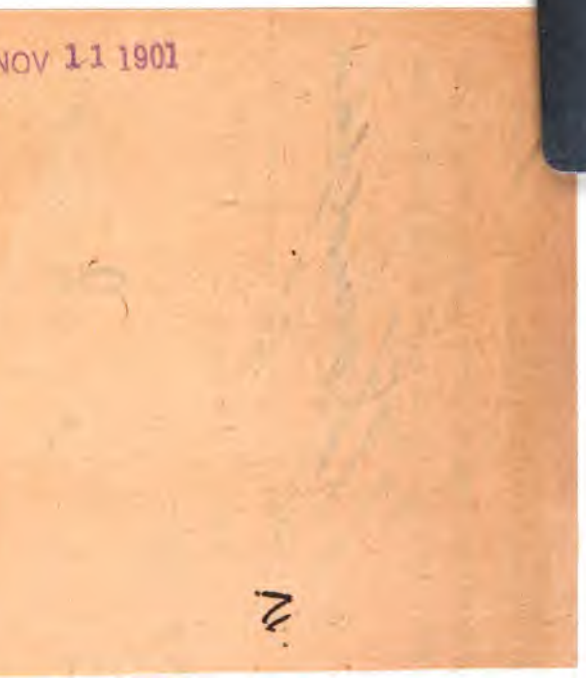
β) (Die Nebenumstände haben geringen Einfluß.) Am 14. Juni abends 9 Uhr m. Gr. Z. kulminierte südwestlich von Californien bei 1 m Augeshöhe der Sonnenunterrand mit einem Höhenwinkel von $88^{0}\,18'$, darauf wurde 15 sm nach NNO gesegelt, und nun fand man nachts $10^{h}\,30^{m}$ m. Gr. Z. als Höhenwinkel des Sonnenunterrandes $69^{0}\,23'$. Wo liegt der erste Ort? — Die Deklinationen sind + $23^{0}\,18'\,58''$ und $23^{0}\,19'\,7''$, die atmosphärische Strahlenbrechung beträgt $2''$ und $22''$, der Sonnenradius $15'\,47''$, die Kimmtiefe $1'\,47''$, die Zeitgleichung bei der zweiten Beobachtung + 8^{s}.

NOV 11 1901



NOV 11 1901

NOV 11 1901



NOV 11 1901

Math 8078.98
Trigonometrische Aufgaben fur Gymn
Cabot Science 003344650
3 2044 091 917 278